Сборник индивидуальных практических заданий по высшей математике. /Сост. А.Д. Петренко, Г.И. Труш. - Донецк: ДИП, 1998 г. - с.

Приведены тексты индивидуальных заданий по основным разделам курса высшей математики, изучаемого студентами экономических специальностей. Каждое задание снабжено необходимыми методическими упражнениями, а также решением соответствующего типового варианта.

ВВЕДЕНИЕ

Самостоятельная работа студентов предусматривает собой один из важнейших компонентов обучения. В отличие, например, от практических занятий, где на помощь студенту всегда придет преподаватель, в процессе выполнения индивидуального задания студент вынужден обращаться к конспекту, учебнику, различного рода практическим курсам и методическим указаниям, т.е. учиться в широком смысле этого понятия.

Сборник содержит тексты 9 индивидуальных занятий, соответствующих основным разделам курса высшей математики. Это не значит, что все они должны выполняться студентом; выбор предоставляется преподавателю.

Сборник может быть использован также при проведении практических занятий, для текущих домашних заданий, а также в качестве основы практических заданий экзаменационных билетов.

При выполнении индивидуальных заданий студенту полезно пользоваться следующими рекомендациями общего характера:

1. Решать задачи следует не “по образцу и подобию”, а только после изучения теоретического материала.
2. Задание необходимо выполнить с особой тщательностью, объясняя, по возможности, логику решения, применяя методы, а также проводя подробные вычисления.
3. Следует помнить, что в ряде задач полученные ответы можно проверить самостоятельно (решение линейных систем, неопределенный интеграл, дифференциальные уравнения, аналитическая геометрия на плоскости и т.д.).

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ 1
“ Линейная алгебра”

Выполняя данное задание студент должен: приобрести навыки вычисления определителей, в частности, наиболее эффективными способами на основе использования их основных свойств; научиться решать совместные и определенные системы линейных алгебраических уравнений методами Крамера и обратной матрицы; решать произвольные системы линейных уравнений, в том числе однородных, методом Гаусса.

Методические рекомендации по выполнению задания

Задача 1. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

Решение. Один из способов вычисления определителей порядка выше третьего состоит в понижении порядка, основанном на их разложении по элементам некоторой строки или столбца (это свойство определителя часто используют в качестве определения). Прежде чем применить метод понижения порядка, полезно, используя основные свойства определителя, обратить в нуль все, кроме одного, элементы некоторой строки или столбца. Если этого не сделать, то, например, при вычислении определителя четвертого порядка, вообще говоря, необходимо будет вычислить четыре определителя третьего порядка, разумеется, при этом также получится правильный ответ, однако объем вычислений возрастает.

В данном примере в третьем и четвертом столбцах (строках) уже есть нули, поэтому разлагать определитель целесообразно по элементам одного из этих рядов, кроме того, при обращении в нуль элементов некоторого ряда удобно использовать единичный элемент (или минус единицу), которые также находятся в третьем столбце. Поэтому наиболее целесообразно разложить наш определитель по элементам третьего столбца, предварительно обратив в нуль все его элементы, кроме единичного. С этой целью третью строку умножим на 3 и прибавим к первой и третью строку прибавим ко второй. В результате получаем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 20 & 9 & 0 & 4 \\ 8 & 3 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 20 & 9 & 4 \\ 8 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix}$$

Из первого столбца определителя третьего порядка вынесем общий множитель 2 и из второго 3:

$$\Delta = 6\cdot\begin{vmatrix} 10 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

Полученный определитель можно вычислить, например, по правилу треугольников. В результате находим

$$\Delta = 6\cdot\left(10\cdot 1\cdot(-5)+3\cdot 2\cdot 1+4\cdot 1\cdot 4-1\cdot 1\cdot 4-4\cdot 3\cdot(-5)-1\cdot 2\cdot 10\right)=$$
$$= 6\cdot(-50+6+16-4+60-20)=48$$

Ответ: 48.

Задача 2. Систему уравнений решить методом Крамера и матричным методом.

$$\begin{cases} x-2y+3z=14 \\ 2x+3y+z=1 \\ -3x+y+2z=-1 \end{cases}$$

Решение. Находим определитель Δ системы и определители Δ_x, Δ_y, Δ_z, входящие в формулы Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & -5 & 11 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ -5 & 11 \end{vmatrix}=77-25=52;$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} -14 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 40 & 17 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 40 & 17 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=-(120-68)=-52;$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & -14 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -14 & 3 \\ 0 & 29 & -5 \\ 0 & -43 & 11 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 29 & -5 \\ -43 & 11 \end{vmatrix}=29\cdot 11-(-5)\cdot(-43)=104;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -14 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -14 \\ 0 & 7 & 29 \\ 0 & -5 & -43 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 29 \\ -5 & -43 \end{vmatrix} =$$

$$= 7 \cdot (-43) - (-5) \cdot 29 = -156.$$

По формулам Крамера получаем:

$$X = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-52}{52} = -1, \quad Y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{104}{52} = 2, \quad Z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-156}{52} = -3.$$

Перепишем систему в матричном виде AX = B, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -14 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Решение матричного уравнения известно: $X = A^{-1}B$. Найдем A^{-1}. С этой целью вычислим алгебраические дополнения матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7, \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -11,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 11, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 11, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 5, \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7.$$

Таким образом,

$$A^{-1} = \frac{1}{52} \begin{pmatrix} 5 & 7 & -11 \\ -7 & 11 & 5 \\ 11 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Проверим правильность вычислений при нахождении обратной матрицы. Для этого найдем:

$$A^{-1}A=\frac{1}{52}\begin{pmatrix}5 & 7 & -11\\ -7 & 11 & 5\\ 11 & 5 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{52}\begin{pmatrix}52 & 0 & 0\\ 0 & 52 & 0\\ 0 & 0 & 52\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

Обратная матрица найдена верно. Далее находим вектор-столбец решения системы.

$$X=\frac{1}{52}\begin{pmatrix}5 & 7 & -11\\ -7 & 11 & 5\\ 11 & 5 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-14\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{52}\begin{pmatrix}-70+7+11\\ 98+11-5\\ -154+5-7\end{pmatrix}=\frac{1}{52}\begin{pmatrix}-52\\ 104\\ -156\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ -3\end{pmatrix}.$$

Таким образом, X= - 1,Y=2, Z= - 3.

Ответ: (-1, 2, -3).

Задача 3. Исследовать на совместность систему уравнений и, в случае совместности, найти ее решение.

$$\begin{cases}2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6\\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4\\ 9x_1+4x_2+\ x_3+7x_4=2\end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}2 & 7 & 3 & 1 & 6\\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4\\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 3\\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4\\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 3\\ 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -5\\ 0 & -\frac{55}{2} & -\frac{25}{2} & \frac{5}{2} & -25\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}2 & 7 & 3 & 1 & 6\\ 0 & 11 & 5 & -1 & 5\end{array}\right)$$

Непосредственно из последней матрицы видно, что rang A=rang $\overline{A}=2$ и по теореме Кронекера-Капелли система совместна.

В качестве базисных неизвестных можно выбрать x_1 и x_2, так как при этом базисный минор $M=\begin{vmatrix}2 & 7\\ 0 & 11\end{vmatrix}=22$ отличен от нуля, тогда свободными неизвестными будут x_3 и x_4, которые положим равными $x_3=C_1$, $x_4=C_2$. В результате система принимает вид:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 = -3C_1 - C_2 + 6 \\ \qquad 11x_2 = -5C_1 + C_2 + 5 \end{cases}$$

Решая эту систему относительно неизвестных x_1 и x_2, находим:

$$x_1 = \frac{2}{11}C_1 - \frac{18}{11}C_2 + \frac{31}{11}$$
$$x_2 = -\frac{5}{11}C_1 - \frac{1}{11}C_2 + \frac{5}{11}.$$

Ответ: $\left(\frac{2}{11}C_1 - \frac{18}{11}C_2 + \frac{31}{11};\quad -\frac{5}{11}C_1 + \frac{1}{11}C_2 + \frac{5}{11};\ C_1;\ C_2\right)$

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ
«Линейная алгебра»

Задание 1. Вычислить определитель:

1.1 $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

1.2 $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -4 & 9 \end{vmatrix}$

1.3 $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

1.4 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

1.5 $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

1.6 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

1.7 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

1.8 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

1.9 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

1.10 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

1.11 $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

1.12 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

1.13 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

1.14 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

1.15 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

1.16 $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

1.17 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

1.18 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

1.19 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

1.20 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

1.21
$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

1.22
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

1.23
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

1.24
$$\begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

1.25
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Задание 2. Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Требуется:

1) Найти ее решение с помощью формул Крамера;
2) Решить систему матричным методом, при этом правильность вычисления обратной матрицы проверить, используя матричное умножение.

2.1
$$\begin{cases} -3x+5y-6z=-5 \\ 2x-3y+5z=8 \\ x+4y-z=1 \end{cases}$$

2.2
$$\begin{cases} -2x+5y-6z=-8 \\ x+7y-5z=-9 \\ 4x+2y-z=-12 \end{cases}$$

2.3
$$\begin{cases} x+7y-2z=3 \\ 3x+5y+z=5 \\ -2x+5y-5z=-4 \end{cases}$$

2.4
$$\begin{cases} -2x+y-3z=-4 \\ 4x+7y-2z=-6 \\ x-8y+5z=1 \end{cases}$$

2.5
$$\begin{cases} -x+2y+3z=3 \\ 2x+3y-z=1 \\ x-y+2z=-2 \end{cases}$$

2.6
$$\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ x-y-z=-1 \\ 3x+y+2z=5 \end{cases}$$

2.7
$$\begin{cases} 3x+2y-3z=-1 \\ 2x-y+3z=2 \\ x+y+2z=3 \end{cases}$$

2.8
$$\begin{cases} 4x-7y-3z=-10 \\ 2x+9y-z=8 \\ -x+6y-3z=3 \end{cases}$$

2.9
$$\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ 4x-y+5z=6 \\ x-2y+4z=9 \end{cases}$$

2.10
$$\begin{cases} x-5y+3z=-1 \\ 2x+4y+z=6 \\ -3x+3y-7z=-13 \end{cases}$$

2.11
$$\begin{cases} 2x+y+3z=1 \\ -x+3y+z=-4 \\ 3x-y+3z=-4 \end{cases}$$

2.12
$$\begin{cases} 2x+y+3z=1 \\ -x+2y-2z=-1 \\ x-2y+3z=2 \end{cases}$$

2.13

$$\begin{cases} x+2y-3z=-2 \\ 2x+3y-z=0 \\ -x+2y-2z=1 \end{cases}$$

2.14

$$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 2x-2y+3z=1 \\ -x+y+z=-3 \end{cases}$$

2.15

$$\begin{cases} 3x-2y-z=3 \\ 2x+y-2z=1 \\ -x+2y-2z=0 \end{cases}$$

2.16

$$\begin{cases} 2x+3y-4z=5 \\ x+2y-3z=3 \\ 3x-y+2z=2 \end{cases}$$

2.17

$$\begin{cases} 3x+4y+2z=8 \\ 2x-4y-3z=-1 \\ x+5y+z=0 \end{cases}$$

2.18

$$\begin{cases} 3x-9y+8z=5 \\ 2x-5y+5z=4 \\ 2x-y+z=-4 \end{cases}$$

2.19

$$\begin{cases} x-y+2z=-4 \\ 2x+2y+z=3 \\ -3x+y-z=-2 \end{cases}$$

2.20

$$\begin{cases} 2x+4y-z=-7 \\ 3x+y+2z=0 \\ -x-3y-2z=-2 \end{cases}$$

2.21

$$\begin{cases} 2x-y-3z=1 \\ -x-3y+4z=8 \\ 3x+4y-z=3 \end{cases}$$

2.22

$$\begin{cases} 3x+4y-z=4 \\ -x-2y+2z=-1 \\ 2x+y+z=1 \end{cases}$$

2.23

$$\begin{cases} x-2y-4z=1 \\ 3x+3y+z=-10 \\ -2x-y+2z=4 \end{cases}$$

2.24

$$\begin{cases} 2x-y+3z=-3 \\ -x+2y-z=2 \\ 3x+3y+z=7 \end{cases}$$

2.25

$$\begin{cases} x+2y-3z=-5 \\ 2x+3y+2z=-6 \\ -3x+y-7z=-13 \end{cases}$$

Задание 3. Исследовать на совместность систему уравнений с помощью теоремы Кронекера-Капелли, и, в случае совместности , найти ее решения.

3.1

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-x_4=4 \\ 9x_1+4x_2-5x_3+x_4=11 \\ -3x_1-x_2+2x_3-4x_4=1 \end{cases}$$

3.2

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=1 \\ -x_1+3x_2+2x_3-3x_4=3 \\ -x_1+13x_2+8x_3+7x_4=11 \end{cases}$$

3.3

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 9x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

3.4

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -2 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -7 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -6 \end{cases}$$

3.5

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 5x_1 + 5x_2 - 8x_3 + 7x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

3.6

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 7x_3 - 3x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

3.7

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases}$$

3.8

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -6 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

3.9

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ -4x_1 + 5x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

3.10

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 4 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

3.11

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -5 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

3.12

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

3.13

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -6 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 4 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -4 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 - 7x_4 = -3 \end{cases}$$

3.14

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - 7x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

3.15

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 7x_2 - 6x_3 - 3x_4 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

3.16

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -7 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -5 \end{cases}$$

3.17

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 7x_1 - 11x_2 + 10x_3 - 5x_4 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases}$$

3.18

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 12x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

3.19

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ -4x_1 - 7x_2 + 9x_3 - 8x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

3.20

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 9 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 = -3 \end{cases}$$

3.21

$$\begin{cases} -3x_1 - 9x_2 + 25x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 9x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

3.22

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$$

3.23

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -2 \end{cases}$$

3.24

$$\begin{cases} 3x_1 - 8x_2 - 7x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 1{,}5x_4 = 0 \\ x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

3.25

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 + 10x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ 2
“Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии”

Выполняя данное задание студент должен приобрести навыки в проведении основных алгебраических действий над векторами, а также применять методы векторной алгебры к решению некоторых задач аналитической геометрии.

Методические указания к выполнению задания.

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды A_1 (-1, 0, -2), A_2 (3, 1, 1), A_3 (-2, 1, 4), A_4 (2, 1, -1). Найти:

а) длину ребра A_1A_2;

б) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;

в) площадь грани $A_1A_2A_3$;

г) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$;

д) объем пирамиды;

е) угол между плоскостями $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_3$.

Решение. а) длину ребра A_1A_2 находим, как расстояние между двумя точками A_1 и A_2:

$$\left|A_1A_2\right| = \sqrt{(3-(-1))^2 + (1-0)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{26} \text{ (ед.)}.$$

б) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4 находим, как угол между векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_4}$. Имеем:

$$\overline{A_1A_2} = \{3+1;\ 1-0;\ 1+2\} = \{4;\ 1;\ 3\}$$

$$\overline{A_1A_4} = \{2+1;\ 1-0;\ -1+2\} = \{3;\ 1;\ 1\}$$

$$\cos \overline{A_1A_2}\,{}^\wedge\,\overline{A_1A_4} = \frac{\vec{A_1A_2}\cdot\vec{A_1A_4}}{\left|\vec{A_1A_2}\right|\left|\vec{A_1A_4}\right|} = \frac{12+1+3}{\sqrt{16+1+9}\cdot\sqrt{9+1+1}} = \frac{16}{\sqrt{286}} \approx 0{,}946;$$

$$\overline{A_1A_2}\,{}^\wedge\,\overline{A_1A_4} \approx 18^{o}55'$$

в) Площадь грани $A_1A_2A_3$ находим по формуле:

$$S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}\right|$$

$$\overline{A_1A_4} = \{-2+1;\ 1-0;\ 4+2\} = \{-1;\ 1;\ 6\}$$

$$\left|\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}\right| = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \bar{i}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - \bar{j}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + \bar{k}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot\bar{i} - 27\cdot\bar{j} + 5\cdot\bar{k}$$

Следовательно,

$$S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\sqrt{9+729+25} = 13{,}81 \ (\text{ед.}^2)$$

г) уравнение высоты, проведенной из вершины A_4 находим как уравнение прямой, проходящей через данную точку и имеющей данный направляющий вектор. В качестве последнего можно взять нормальный вектор плоскости $A_1A_2A_3$, а именно $\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}$, который был найден в п. в). В результате получаем

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-27} = \frac{z+1}{5}$$

д) объем пирамиды равен 1/6 модуля смешанного произведения векторов $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$ и $\overline{A_1A_4}$ т.е.

$$V = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}(4+18-33-9+1-24) = \frac{13}{6} (\text{ед.})$$

е) угол между плоскостями $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$ находим как угол между нормальными векторами этих плоскостей:

$$\overline{N_{A_1A_2A_3}} = \{3;\ -27;\ 5\}.$$

Вектор $\overline{N_{A_1A_2A_3}}$ равен

$$\overline{N_{A_1A_2A_4}} = \overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_4} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}.$$

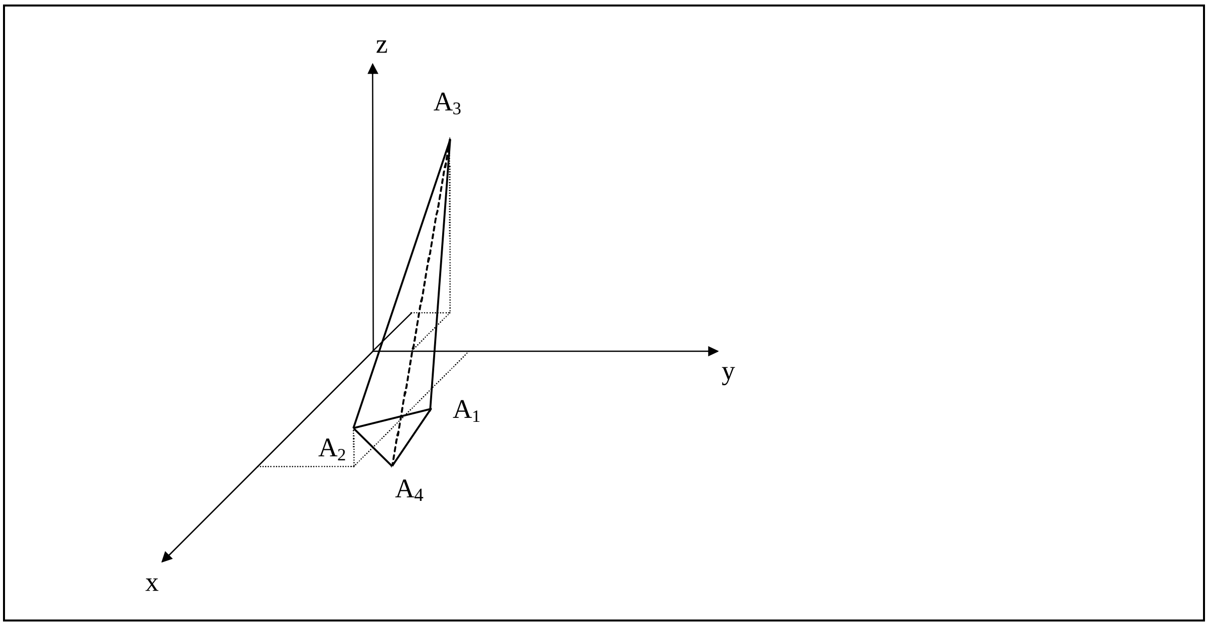
Таким образом,

$$\cos\varphi = \frac{\overline{N_{A_1A_2A_3}} \cdot \overline{N_{A_1A_2A_4}}}{\left|\overline{N_{A_1A_2A_3}}\right| \cdot \left|\overline{N_{A_1A_2A_4}}\right|} =$$

$$= \frac{\{3;\ -27;\ 5\} \cdot \{-2;\ 5;\ 1\}}{\sqrt{763} \cdot \sqrt{30}} = -\frac{136}{\sqrt{22890}} = -0{,}9$$

$\varphi = \pi$ - arccos (0,9) $\approx 154^0$

Сделаем чертеж



.

Задача 2. Даны четыре точки A_1 (-1, 0, -2), A_2 (3, 1, 1), A_3 (-2, 1, 4), A_4 (2, 1, -1).

а) Найти $\vec{a} = \overline{A_1A_2}$, $\vec{b} = \overline{A_1A_3}$, $\vec{c} = \overline{A_1A_4}$. Есть ли среди этих векторов коллинеарные?

Решение.

$$\vec{a} = \overline{A_1A_2} = \{3+1;\ 1-0;\ 1+2\} = \{4;\ 1;\ 3\};$$
$$\vec{b} = \overline{A_1A_3} = \{-2+1;\ 1-0;\ 4+2\} = \{-1;\ 1;\ 6\};$$
$$\vec{c} = \overline{A_1A_4} = \{2+1;\ 1-0;\ -1+2\} = \{3;\ 1;\ 1\}.$$

Среди этих векторов нет векторов с пропорциональными координатами, следовательно, нет и коллинеарных.

б) Найти вектор $\overline{x}$, коллинеарный вектору $\overline{a}$, если известно, что $|\overline{x}| = 3$ и он направлен в сторону, противоположную вектору $\overline{a}$.

Решение. Поскольку вектор $\bar{x}$ коллинеарен вектору $\bar{a}$, $\bar{x} = \lambda\bar{a}$, а т.к. он направлен в сторону, противоположную $\bar{a}$, число $\lambda < 0$. По условию задачи $|\bar{x}| = 3 = |\lambda| \cdot |\bar{a}|$.

Учитывая, что $|\bar{a}| = \sqrt{16+1+9} = \sqrt{21}$ находим $|\lambda| = \frac{3}{\sqrt{21}}$. Отсюда получим $l = -\frac{3}{\sqrt{21}}$. Таким образом,

$$\bar{x} = -\frac{3}{\sqrt{21}}\{4;\quad 1;\quad 3\} = \left\{-\frac{12}{\sqrt{21}};\quad -\frac{3}{\sqrt{21}};\quad -\frac{9}{\sqrt{21}}\right\}$$

в) Вычислить скалярное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{c}$. Перпендикулярны ли они?

Решение.

$$\bar{a}\cdot\bar{c} = \left(4\cdot\bar{i} + \bar{j} + 3\cdot\bar{k}\right)\cdot\left(3\cdot\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}\right) = 4\cdot 3 + 1\cdot 1 + 3\cdot 1 = 16$$

Т.к. $\bar{a}\cdot\bar{c} \neq 0$, векторы не перпендикулярны.

г) Найти внутренний угол при вершине A_1 треугольника $A_1A_2A_3$.

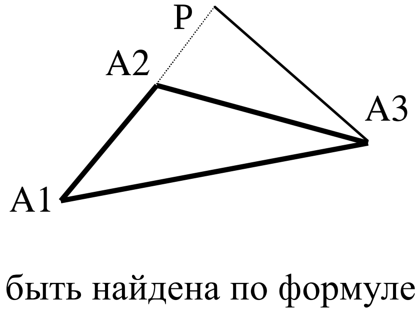
Решение. Искомый угол равен углу между векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$. Известным образом находим:

$$\cos\ (\overline{A_1A_2}\,^\wedge\,\overline{A_1A_3}) = \cos\ (\bar{a},\bar{b}) = \frac{\{4;\quad 1;\quad 3\}\cdot\{-1;\quad 1;\quad 6\}}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{38}} = \frac{-4+1+18}{\sqrt{988}} =$$

$$= \frac{15}{\sqrt{988}} = 0{,}477$$

д) Найти площадь треугольника $A_1A_2A_3$ и длину его высоты, опущенной из вершины A_3 на A_1A_2.

Решение. Сделаем схематический чертеж:



Площадь треугольника может быть найдена по формуле:

$$S=\frac{1}{2}\left|\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}\right|=\frac{1}{2}\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$$

находим векторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 4 & 1 & 3\\ -1 & 1 & 6\end{vmatrix}=3\cdot\bar{i}-28\bar{j}+5\bar{k}$$

Таким образом, $S=\frac{1}{2}\sqrt{9+78+25}=\frac{\sqrt{818}}{2}$ (ед.^{2})

С другой стороны:

$$S=\frac{1}{2}\left|\overline{A_1A_2}\right|\cdot h$$

где $h=\left|PA_3\right|$ – искомая высота. Учитывая, что $\left|\overline{A_1A_2}\right|=\left|\bar{a}\right|=\frac{2}{\sqrt{26}}$ и, приравнивая оба выражения для площади, находим:

$$\frac{\sqrt{818}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{26}\cdot h\quad\Rightarrow h=\frac{\sqrt{818}}{\sqrt{26}}=5{,}61\text{ (ед.)}$$

е) Определить, образуют ли векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ базис? Если да, то найти разложение по этому базису вектора $\bar{d}=\{1;\ -1;\ 2\}$.

Решение. Найдем смешанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}4 & 1 & 3\\ -1 & 1 & 6\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}=4+18-3-9+1-24=-13$$

Т.к. это произведение отлично от нуля, векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ не компланарны и могут служить базисом. Разложение вектора $\bar{d}$ по этому базису имеет вид:

$$\bar{d}=\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}+\gamma\bar{c}$$

Или в координатной записи

$$\{1;-1;2\}=\alpha\{4;1;3\}+\beta\{-1;1;6\}+\gamma\{3;1;1\}.$$

Приравнивая координаты векторов, стоящих в обеих частях этого равенства, получаем систему уравнений для определения коэффициентов α, β и γ (координат вектора $\bar{d}$ в данном базисе):

$$\begin{cases} 4\alpha - \beta + 3\gamma = 1 \\ \alpha + \beta + \gamma = -1 \\ 3\alpha + 6\beta + \gamma = 2 \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $\alpha = -\frac{32}{13}$, $\beta = -\frac{5}{13}$, $\gamma = -\frac{40}{13}$.

Таким образом, окончательно находим:

$$d = -\frac{32}{13}\bar{a} - \frac{5}{13}\bar{b} - \frac{40}{13}\bar{c}.$$

ж) Найти единичные векторы, перпендикулярные векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Решение. Векторы, перпендикулярные векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ параллельны и антипараллельны векторному произведению векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т.е. вектору

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot \bar{i} - 28\bar{j} + 5\bar{k}$$

Единичный вектор в направлении вектора $\bar{a} \times \bar{b}$ равен

$$\overline{e_1} = \frac{\bar{a} \times \bar{b}}{|\bar{a} \times \bar{b}|} = \frac{\{3; \quad -28; \quad 5\}}{\sqrt{818}},$$

а противоположный ему

$$\overline{e_2} = \frac{\{-3; \quad 28; \quad -5\}}{\sqrt{818}}.$$

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ 3
“Предел и непрерывность функции”

Выполнив настоящее задание, студент должен приобрести навыки раскрытия некоторых видов неопределенностей, в частности, сводящихся к первому и второму замечательным пределам, а также уяснить одно из фундаментальных понятий анализа - непрерывность функции.

Методические указания к выполнению задания.

Задача 1. Найти области определения функций:

$$a)\ y=\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{2+x}};$$

$$b)\ y=\arcsin\left(\lg\frac{x}{10}\right)$$

Решение. а) Первое слагаемое принимает действительные значения при $-x\geq 0$ а второе - при $2+x>0$.

Таким образом, для нахождения области определения функции необходимо решить систему неравенств: $\begin{cases}-x\geq 0\\ 2+x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 0\\ x>-2\end{cases}$

Следовательно, область определения функции $x\in$ [-2, 0].

б) функция y=arcsin u определена на отрезке [-1, 1], т.е. $-1\leq\lg\frac{x}{10}\leq 1$.

Кроме того, выражение под знаком логарифма должно быть положительным: $\frac{x}{10}>0$.

В результате получаем систему:

$$\begin{cases}-1\leq\lg x-\lg 10\leq 1\\ x>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\leq\lg x\leq 2\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\leq x\leq 100\\ x>0\end{cases}\Rightarrow 1\leq x<100.$$

Ответ: $x\in[1,\ 100]$

Задача 2. Найти пределы функций:

$$\text{а) } \lim_{x\to 1}\frac{4-2x+3x^3}{-2x^3+4x-1}; \quad \text{б) } \lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{-x\cdot \mathrm{tg}2x}; \quad \text{г) } \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}.$$

Решение. а) теорема о пределе частного здесь не применима, т.к. при $x\to\infty$ как числитель, так и знаменатель дроби неограниченно возрастают, т.о. мы имеем дело с неопределенностью вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Для ее раскрытия числитель и знаменатель необходимо разделить на старшую степень переменной x из обеих частей дроби. В данном случае их следует разделить на x^3. Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4-2x+3x^3}{-2x^3+4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x^3}-\frac{2}{x^2}+3}{-2+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{0-0+3}{-2+0+0}=-\frac{3}{2}.$$

б) При подстановке в функцию значения $x=-1$ получаем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Чтобы раскрыть ее, выполняем тождественные преобразования, полагая $x\neq -1$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=\frac{-1+2}{(-1)^2-1+1}=1.$$

в) при $x\to\infty$ мы имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Чтобы раскрыть ее, воспользуемся теоремами о пределах, а также известным значением предела $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ (первый замечательный предел). Имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x\cdot \operatorname{tg}2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{3}{2}x}{x\cdot\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}=2\lim_{x\to 0}\cos 2x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{3}{2}x}{x\cdot \sin 2x}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{3}{2}x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{3}{2}x}{\sin 2x}.$$

При нахождении пределов полезно использовать следующие результаты:

1. $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin\alpha t}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\alpha\frac{\sin\alpha t}{\alpha t}=\alpha$

2. $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin\alpha t}{\sin\beta t}=\frac{\alpha}{\beta}.$

Т.о. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x\cdot \operatorname{tg}2x}=2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{4.}$

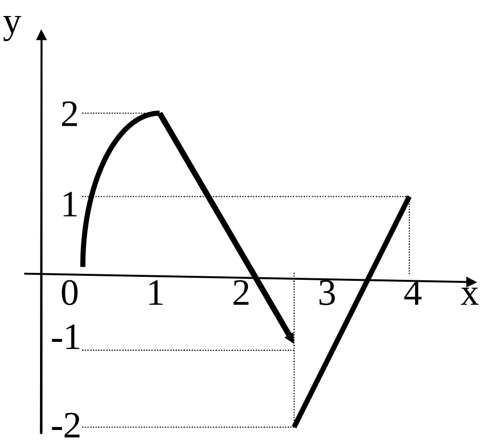
Задача 3. Исследовать на непрерывность функцию:

$$Y=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\le x\le 1\\ 1{,}4-2x, & 1<x<2{,}5\\ 2x-7, & 2{,}5\le x\le 4.\end{cases}$$

Решение. Функция определена на промежутке (0, 4) и составлена из элементарных функций, каждая из которых непрерывна во всех точках, где она задана. Поэтому она может иметь разрывы только в точках 1 и 2,5. Находим

$$\lim_{x\to 1+0}y=\lim_{x\to 1+0}(4-2x)=2$$

$$\lim_{x\to 2{,}5-0}y=\lim_{x\to 2{,}5-0}(4-2x)=-1$$



В точке x = 1 функция определена и ее значение равно $2\sqrt{1}=2$, т.е. пределу справа. Следовательно, в этой точке функция непрерывна y (2,5)=2*2,5-7=-2, а предел слева этой функции равен - 1,т.о. x=2,5 - точка разрыва первого рода. Сделаем схематический чертеж:

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ

«Предел и непрерывность функции»

Задание 1. Найти область определения функции

1.1 $y=\sqrt{\dfrac{x+3}{1-x}}+\dfrac{1}{x^2}$;

1.2 $y=\dfrac{\lg(1-x^2)}{x}$;

1.3 $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$;

1.4 $y=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

1.5 $y=\dfrac{1-x}{\sqrt{x^2-3}}$;

1.6 $y=\dfrac{\log_2\sqrt{x+3}}{x-1}$;

1.7 $y=\sqrt{\dfrac{x}{x-3}}$;

1.8 $y=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-2}}$;

1.8 $y=\dfrac{1}{x\left(2^x-4\right)}$;

1.10 $y=\sqrt{x^2-x-6}$;

1.11 $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}$;

1.12 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3x^2+x-2}}$;

1.13 $y=\arccos\left(x^2+1\right)$;

1.14 $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}$;

1.14 $y=\sin\sqrt{x}+\dfrac{1}{x-2}$;

1.16 $y=\dfrac{1}{\cos x}$;

1.17 $y=\lg\left(2x^2+9x+4\right)$;

1.18 $y=\dfrac{\sqrt{x^2+5+6}}{x}$;

1.19 $y=\sqrt{3^x-27}$;

1.20 $y=\dfrac{|x|}{x}$;

1.21 $y=\dfrac{1}{\sqrt{|\sin x|}}$;

1.22 $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3+8}}$;

1.23 $y=\dfrac{1}{\sqrt{5x+5}-5}$;

1.24 $y=\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$;

1.25 $y=\lg\left(2x^2-4x+2\right)$.

Задание 2. Найти указанные пределы (не пользуясь правилом Лопиталя).

2.1 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4}{3x^2-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos-\cos^2 x}{3x\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{2+x}{x}}$;

2.2 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3-3x+1}{4-2x^2-3x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-3}{\sqrt{8+x}-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{1-\cos x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{1+3x}\right)^{4x}$;

2.3 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+3x^2-2}{x^3-x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+7x+3}{x^2-2x-15}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\mathrm{tg}2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\mathrm{tg}x)^{\mathrm{ctg}x}$;

2.4 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{x-2x^2+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2+3x-10}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\mathrm{ctg}^2 5x\right)$; г) $\lim\limits_{x\to -3}(5+2x)^{\frac{1}{x+2}}$;

2.5 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-3x^2+2}{x^2+3x^3+x}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+5x-24}{2x^2-5x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{1-\cos^2 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{2}{x}}$;

2.6 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-2x+4x^2}{5+x+8x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-\sqrt{4x-3}}{x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 5x}{\sin^2 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x+5}\right)^{x+3}$;

2.7 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3-x^2-7}{x+x^3-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-7x-4}{2x^2-13x+20}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 16x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{2x}{x-1}}$;

2.8 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-5x+1}{1-2x-x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2-5x-7}{3x^2+x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x\operatorname{tg}x}{\sin^2 x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x+3}\right)^{x-8}$;

2.9 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x-x^2}{x^3+x}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos3x}{x\operatorname{tg}2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+5}\right)^{2x-1}$;

2.10 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+1}{3x^3-x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2}{1-\cos3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2+3x}$;

2.11 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+5x-2}{x^2+2x+15}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2+7x-4}{10x-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos9x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+2}\right)^{x+3}$;

2.12 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+x^2-3x^3}{1-3x+6x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{4x^2-5x-21}{2x^2-3x-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2 3x}{\operatorname{tg}^2 4x}$; г) $\lim\limits_{x\to1}(5x-4)^{\frac{3x}{x-1}}$;

2.13 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-3x+4}{4x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-3x}\dfrac{2x+6}{x^2-2x-15}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 3x}{15x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{2x}$;

2.14 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-4x^2+5}{3x^4-2x^2+x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-4}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos8x}{3x\sin4x}$; г) $\lim\limits_{x\to3}(10-3x)^{\frac{1}{9-3x}}$;

2.15 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^4-2x^2+4}{x^5+2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+10}-3}{x^2+x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xtg5x}{1-\cos^2 5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{2x+3}$;

2.16 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+x^2-3x^3}{1-3x+6x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{tg3x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x^3}\right)^{x^3}$;

2.17 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-4x-5}{x^2+x-x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^2-3x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 5x}{tg^2 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+2}\right)^{x+3}$;

2.18 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^3-x^2-1}{3x^3+4x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{3x^2+4x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\cos 3x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{2x}{x-1}}$;

2.19 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^4+5x^2+1}{3x^4-2x^3+4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-7x-4}{2x^2-13x+20}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x-3}\right)^{x+1}$;

2.20 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-2x^2+4}{x^4+3x^2+x}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{tg^2 5x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+2x^2\right)^{\frac{3}{x^2}}$;

2.21 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x-24x^2}{3x^3-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2+x-6}{x^2+4x-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x\cos 2x}{\sin^3 x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{3+x}\right)^{2x+1}$;

2.22 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-1}{3-4x-x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{3x^2+2x-1}{5x^2+7x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\,tgx}{1-\cos3x}$; г) $\lim\limits_{x\to2}(2x-3)^{\frac{x^2}{x-2}}$;

2.23 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-3x^2+2x}{3x^3-6x^2+2}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-8}{3x^2-7x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos7x}{2x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x+2}\right)^{x+1}$;

2.24 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{3x^3-2x^2+2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{3-4x^2-4x}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x\sin x}{\sec x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{4x}$;

2.25 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^2+x+2}{2x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-5}\frac{2x^2-50}{x^2+8x+15}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-4}\right)^{x+1}$.

Задание 3. Исследовать на непрерывность функцию y = f(x); найти точки разрыва и определить их тип. Построить схематический график функции.

3.1 $y=\begin{cases}\frac{|x|}{x}, & x<0\\ \sqrt{1-x^2}, & 0\le x\le1;\\ \frac{1}{x-1}, & x>1\end{cases}$

3.2 $y=\begin{cases}\ln(-x), & x<0\\ 2x^2, & 0\le x\le1;\\ x+1, & x\ge1\end{cases}$

3.3 $y=\begin{cases}2e^{-x}, & x\le0\\ x+2, & 0<x\le1;\\ \frac{1}{x-1}, & x>1\end{cases}$

3.4 $y=\begin{cases}-\frac{1}{x-3}, & x<-3\\ -\sqrt{9-x^2}, & -3\le x\le3;\\ \frac{|x-3|}{x-3}, & x>3\end{cases}$

3.5 $y = \begin{cases} 1, \ x \le -\dfrac{p}{2} \\ \sin x, \ \ \dfrac{-p}{2} < x < 0; \\ e^{x}, \ 0 \le x \le 1 \\ e, \ x>1 \end{cases}$

3.6 $y = \begin{cases} \dfrac{3|x|}{x}, \ x<0 \\ \sqrt{9\text{-}x^2}, \ 0 \le x \le 3; \\ \dfrac{1}{x\text{-}3}, \ x>3 \end{cases}$

3.7 $y = \begin{cases} \dfrac{-2|x|}{x}, \ x<0 \\ \sqrt{4\text{-}x^2}, \ 0 \le x \le 2; \\ \dfrac{1}{x-2}, \ x>2 \end{cases}$

3.8 $y = \begin{cases} -\dfrac{1}{x}, \ x<0 \\ e^{x} - 1, \ 0 \le x \le \ln 3 \\ \dfrac{2|x|}{x}, \ x>3 \end{cases}$

3.9 $y = \begin{cases} \dfrac{|x+2|}{x+2}, \ x<\text{-}2 \\ \sqrt{4\text{-}x^2}, \ \text{-}2 \le x \le 2; \\ \dfrac{1}{x\text{-}2}, \ x>2 \end{cases}$

3.10 $y = \begin{cases} -\dfrac{|x|}{x}, \ x<0 \\ 3^{-x}, \ 0 \le x \le 1; \\ \dfrac{1}{3x-1}, \ \ x>1 \end{cases}$

3.11 $y = \begin{cases} -\dfrac{1}{x-2}, \ x<\text{-}2 \\ \sqrt{4\text{-}x^2}, \ \text{-}2 \le x \le 2; \\ \dfrac{2|x|}{x}, \ x>0 \end{cases}$

3.12 $y = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, \ x<0 \\ 1\text{-}x, \ 0 \le x \le 2; \\ x^2 - 5, \ x>2 \end{cases}$

3.13 $y = \begin{cases} -\dfrac{1}{x}, \ x<0 \\ \sin^2 x, \ 0 \le x \le 2p; \\ x - 2p, \ x>2p \end{cases}$

3.14 $y = \begin{cases} \dfrac{2|x|}{x}, \ x<0 \\ x^2 - 2, \ 0 \le x \le 1; \\ \dfrac{1}{x-1}, \ x>1 \end{cases}$

3.15 $y = \begin{cases} -\dfrac{1}{x+2}, \ x<\text{-}2 \\ \sqrt{4\text{-}x^2}, \ \text{-}2 \le x \le 2; \\ \dfrac{2|x|}{x}, \ x>2 \end{cases}$

3.16 $y = \begin{cases} -\dfrac{1}{x+3}, \ x<\text{-}3 \\ \sqrt{9\text{-}x^2}, \ \text{-}3 \le x \le 0; \\ \dfrac{3|x|}{x}, \ x>0 \end{cases}$

3.17 $y = \begin{cases} \ln(x+3), & x<-3 \\ x^2, & -3 \le x \le 3 \\ 12 - x, & x>3 \end{cases}$;

3.18 $y = \begin{cases} -\dfrac{|x|}{x}, & x<0 \\ \cos x, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{1}{x-\pi}, & x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$;

3.19 $y = \begin{cases} -\dfrac{|x|}{x}, & x<0 \\ 2^x, & 0 \le x \le 2; \\ \dfrac{1}{x-2}, & x>2 \end{cases}$

3.20 $y = \begin{cases} 3^{-x} - 1, & x<0 \\ \sin x, & 0 \le x \le \pi; \\ \dfrac{1}{x-\pi}, & x>\pi \end{cases}$

3.21 $y = \begin{cases} \sin x, & x \le 0 \\ \log_2 x, & 0 < x \le 4; \\ 6 - x, & x > 4 \end{cases}$

3.22 $y = \begin{cases} 2^{-x} - x, & x < 0 \\ x - 1, & 0 \le x \le 1; \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$

3.24 $y = \begin{cases} \dfrac{|x+3|}{x+3} & x < -3 \\ \sqrt{9 - x^2}, & -3 \le x \le 3; \\ \dfrac{1}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$

3.24 $y = \begin{cases} \dfrac{1}{3^x - 1}, & x < 0 \\ x^2, & 0 \le x \le 2; \\ x + 2, & x > 2 \end{cases}$

3.25 $y = \begin{cases} x + 1, & x < 0 \\ \cos x, & 0 \le x \le \pi; \\ \dfrac{1}{x-\pi}, & x > \pi \end{cases}$

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ 4
“Производная и ее применение”

Выполнив данное задание, студент должен приобрести навыки дифференцирования элементарных функций, а также применения дифференциального исчисления к исследованию функций и решению задач на нахождение оптимальных значений.

Методические указания к выполнению задания.

Задача 1. Найти производную функцию $y = \sqrt[3]{3x+1}$, пользуясь ее определением.

Решение. По определению производной $y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)}{\Delta x}$ имеем

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt[3]{3(x+\Delta x)+1} - \sqrt[3]{3x+1}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt[3]{3(x+\Delta x)+1} - \sqrt[3]{3x+1}\right)}{\Delta x} \times$$

$$\times \frac{\left[\left(3(x+\Delta x)+1\right)^{2/3} + \sqrt[3]{\left(3(x+\Delta x)+1\right)(3x+1)} + (3x+1)^{2/3}\right]}{\left[\left(3(x+\Delta x)+1\right)^{2/3} + \sqrt[3]{\left(3(x+\Delta x)+1\right)(3x+1)} + (3x+1)^{2/3}\right]} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x + 3\Delta x + 1 - 3x - 1}{\Delta x\left[\left(3(x+\Delta x)+1\right)^{2/3} + \sqrt{\left(3(x+\Delta x)+1\right)(3x+1)} + (3x+1)^{2/3}\right]} =$$

$$= \frac{3}{3[3x+1]^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}}.$$

Задача 2. Найти производные функций:

а) $y = \dfrac{1}{x^2 - \sin 3x}$; б) $y = 4^{-\mathrm{tg} 2x}$;

в) $y = \mathrm{arctg}\, \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; г) $y = \ln \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$.

Решение .а) при дифференцировании этой функции удобнее не вычислять производную частного, а записать ее в виде $y = \left(x^2 - \sin 3x\right)^{-1}$. Тогда по правилу дифференцирования сложной функции имеем:

$$y' = \left(\left(x^2 - \sin 3x\right)^{-1}\right)' = (-1)\left(x^2 - \sin 3x\right)^{-1-1}\left(x^2 - \sin 3x\right)' =$$

$$= -\frac{1}{\left(x^2 - \sin 3x\right)^2}\left(2x - \cos 3x(3x)'\right) = -\frac{2x - 3\cos 3x}{\left(x^2 - \sin 3x\right)^2}$$

б)

$$y' = \left(4^{-\mathrm{tg}2x}\right)' = 4^{-\mathrm{tg}2x} \ln 4\left(-\mathrm{tg}2x\right)' = -4^{-\mathrm{tg}2x} \ln 4 \frac{2}{\cos^2 2x} =$$

$$= -\frac{2\ln 4 * 4^{-\mathrm{tg}2x}}{\cos^2 2x};$$

в)

$$y' = \left(\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'' = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= -\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{2(x+1)};$$

г) при дифференцировании этой функции предварительно удобно воспользоваться свойствами логарифма**:**

$$y' = \left(\ln\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\right)' = \left(\ln x - \frac{1}{2}\ln\left(x^2 - 1\right)\right)' = \frac{1}{x} - \frac{2x}{2\left(x^2 - 1\right)} =$$

$$= \frac{2x^2 - 2 - 2x^2}{2x\left(x^2 - 1\right)} = -\frac{1}{x\left(x^2 - 1\right)}$$

Задача 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции
$y = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2$ на отрезке $[0;2]$.

Решение: 1) находим стационарные точки функции, принадлежащие данному промежутку:

$$y' = 5x^4 - 5x^2 = 0 \iff x^2\left(x^2 - 1\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1.$$

Точка $x = -1 \notin [0\ ;\ 2]$.

2) вычисляем значения функции в стационарных точках и на концах промежутка (в данном случае точка $x_1 = 0$ совпадает с левым концом отрезка):

$$y(0)=2,\ y(1)=1-\frac{1}{3}+2=\frac{8}{3},\ \ y(2)=32-\frac{40}{3}+2=\frac{62}{3}.$$

3) Из полученных значений функции выбираем наибольшее и наименьшее:

$$y_{\min}=y(0)=2,\quad y_{\max}=y(2)=\frac{62}{3}$$

Задача 4. Произвести полное исследование функции $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ и построить ее график.

Решение. а) область существования функции $D(y)=\ ]-\infty,\ 1[\ \cup\ ]1,\ \infty[$. Следовательно прямая x=1 является вертикальной асимптотой. Найдем

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2-2x+2}{x-1}=-\infty,\quad \lim_{x\to 1+0}\frac{x^2-2x+2}{x-1}=\infty.$$

б) Функция общего вида, т.е. не является ни четной, ни нечетной, функция не периодическая.

в) Находим критические точки

$$y'=\left(\frac{x^2-2x+2}{x-1}\right)'=\frac{(2x-2)(x-1)-x^2+2x-2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}.$$

Первая производная обращается в нуль в точках $x_1=0$ и $x_2=0$.

г). Находим вторую производную

$$y''=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-2)(x-1)^2-\left(x^2-2x\right)2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{2}{(x-1)^3}.$$

Вторая производная не обращается в нуль ни в одной точке.

д) Находим наклонные асимптоты

$$к=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+2}{x(x-1)}=1,$$

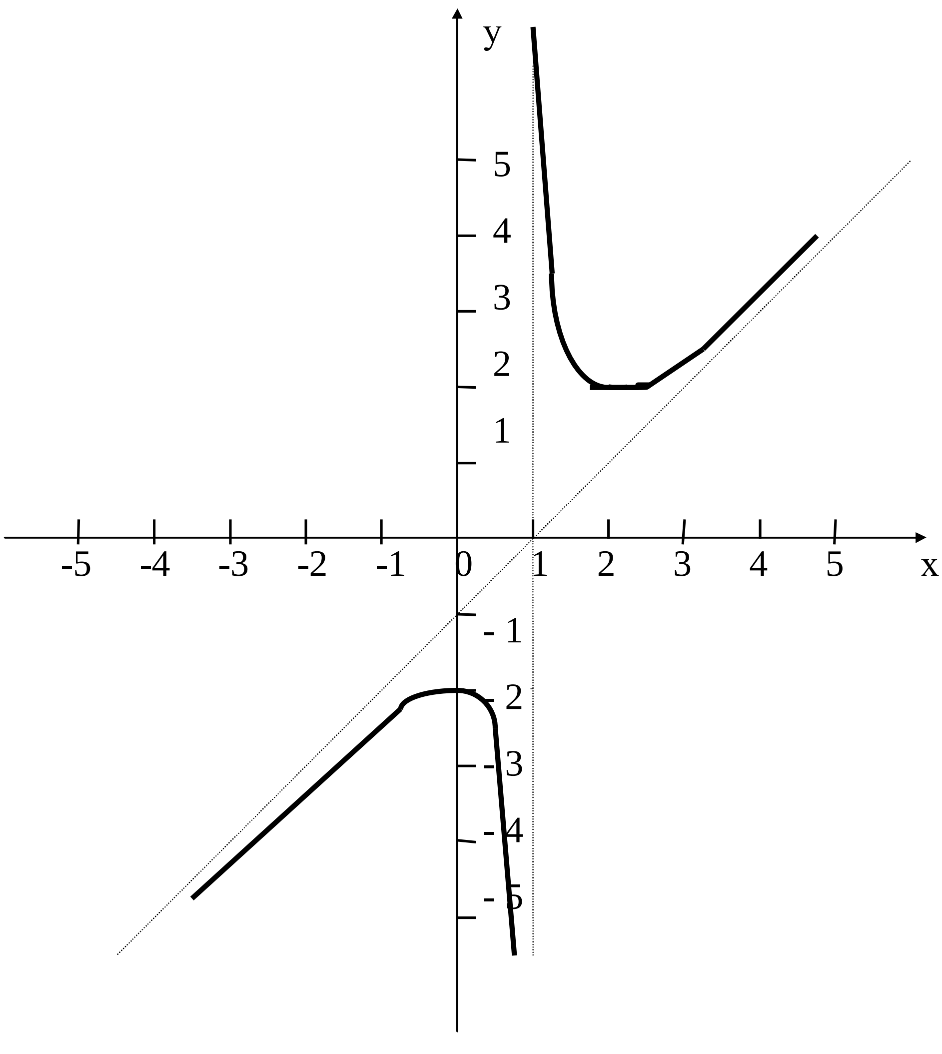
$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+2-x^2+x}{x-1}=-1,$$

y=x-1 - уравнение наклонной асимптоты.

г) Строим таблицу

x	$]-\infty,0[$	0	$]0,\ 1[$	$]1,\ 2[$	2	$]2,\infty[$
y’	+	0	_	_	0	+
y’’	_	-	−	+	+	+
y	↑	- 2 max	↓	↓	2 min	↑

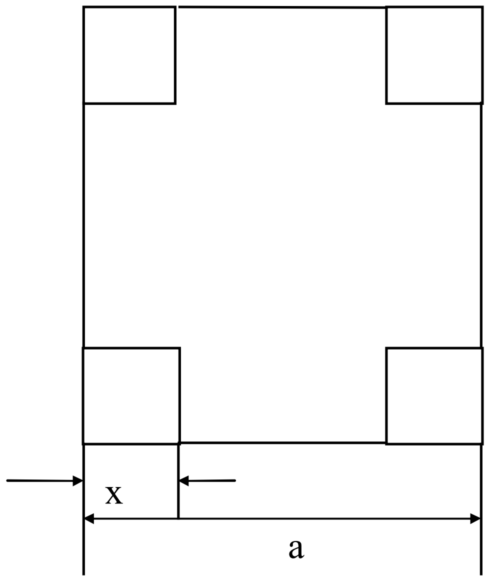
3. Строим график функции



Задача 5. Из квадратного листа картона со стороной *a* требуется сделать открытую прямоугольную коробку наибольшей вместимости, вырезав по углам квадраты и загнув выступы получившейся крестообразной фигуры.

Решение. Сделаем схематический чертеж.

Пусть сторона каждого из вырезанных квадратов равна x. Тогда в основании коробки будет лежать квадрат со стороной *a* - 2x, а высота коробки будет равна x. Ее объем $V(x) = x(a-2x)^2$.



Величина x должна быть не отрицательной $(x \ge 0)$, кроме того, очевидно, что $x \le a/2$.

Таким образом, задача свелась к нахождению наибольшего значения функции $V(x) = x(a-2x)^2$ на отрезке [a, a/2].

Известным образом находим:

$v'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2$;

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 8ax + a^2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{a}{2}; x_2 = \frac{a}{6};$$

$$V(0)=0;\ \ V(a/2)=0;\ \ V(a/6) = \frac{2}{27}a^3$$

Ответ: сторона вырезаемого квадрата должна быть равна a/6.

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ
«Производная и ее применение»

Задание 1. Пользуясь определением, найти производную функции

1.1 $y=\sqrt{3x^2-1}$	1.2 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$	1.3 $y=\frac{1}{x+3}$
1.4 $y=\frac{x-1}{x}$	1.5 $y=\frac{1}{3}x^3-x$	1.6 $y=\sqrt{x+4}$
1.7 $y=x^2-3x+4$	1.8 $y=\frac{1}{x-1}$	1.9 $y=\frac{x+3}{x+2}$
1.10 $y=\sqrt{2x+4}$	1.11 $y=\frac{x}{x+1}$	1.12 $y=x^2+2x+1$
1.13 $y=\frac{4}{x-1}$	1.14 $y=\frac{x-1}{x+3}$	1.15 $y=\frac{4}{x-1}$
1.16 $y=x^2+4x-1$	1.17 $y=\frac{1}{\sqrt{x+2}}$	1.18 $y=\frac{x+3}{x}$
1.19 $y=x^2-2x+1$	1.20 $y=\frac{3}{\sqrt{x-1}}$	1.21 $y=(x+3)^2$
1.22 $y=\sqrt{3x-1}$	1.23 $y=\frac{1}{(x-5)^2}$	1.24 $y=x^2-7x+3$
1.25 $y=x^2-4x+4$		

Задание 2. Найти производные функций

2.1	а) $y=\frac{1}{x-\sqrt{1+x^2}}$	б) $y=3^{\sin x}$
	в) $y=x\ln tgx$	г) $y=\arcsin\frac{1}{x}$
2.2	а) $y=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$	б) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$
	в) $y=x\left(1+e^{-x}\right)$	г) $y=\operatorname{arctg}\left(x^2\right)$
2.3	а) $y=\frac{3-x^2}{x}$	б) $y=\sqrt[3]{1+\cos x}$
	в) $y=\ln\frac{x}{x+1}$	г) $y=\arccos\frac{1}{x}$
2.4	а) $y=x\sqrt{2+x^2}$	б) $y=\frac{\sin 3x}{\cos 5x}$
	в) $y=\ln\sqrt{x+1}$	г) $y=\arcsin\sqrt{x}$

2.5 а) $y=\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$ б) $y=(\sin x+\cos x)^2$

в) $y=\ln\frac{x^2}{x-1}$ г) $y=\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$

2.6 а) $y=x^2e^{-x}$ б) $y=\frac{x^2}{\sin^2 x}$

в) $y=\ln \mathrm{tg} x$ г) $y=\arcsin(x+1)$

2.7 а) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ б) $y=\frac{\sin 5x}{1-2\sin 5x}$

в) $y=\ln\cos 3x$ г) $y=\arcsin\frac{x}{x+1}$

2.8 а) $y=\frac{2x-1}{\sqrt{4x^2+1}}$ б) $y=e^{\sin 2x}$

в) $y=\ln\sqrt[3]{1+\mathrm{tg}x}$ г) $y=\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$

2.9 а) $y=\frac{\sqrt{4x+1}}{x^2}$ б) $y=\sqrt[3]{\mathrm{ctg}^2 3x-1}$

в) $y=\ln\left(e^x+e^{-x}\right)$ г) $y=\arcsin\frac{x}{x+1}$

2.10 а) $y=(3+x)\sqrt{4x-x^2}$ б) $y=\frac{1+\mathrm{tg}2x}{1-\mathrm{tg}2x}$

в) $y=\ln\cos 3x$ г) $y=\arccos\frac{x^2}{x+1}$

2.11 а) $y=x^2\sqrt{1-x}$ б) $y=\frac{1-\sin^2 x}{\cos x}$

в) $y=\ln\left(e^x-1\right)$ г) $y=\arcsin\left(x^3\right)$

2.12 а) $y=(x+4)\sqrt{2-x}$ б) $y=\frac{1}{\mathrm{tg}2x}$

в) $y=\ln\dfrac{x^2}{x^2+1}$ г) $y=\arcsin e^x$

2.13 а) $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}$ б) $y=e^{-x}\sin x$

в) $y=\ln\sqrt{x^2+2x+1}$ г) $y=\dfrac{1}{\arcsin x}$

2.14 а) $y=\dfrac{x^3-1}{x^2+x+1}$ б) $y=\sin^2(4x+3)$

в) $y=\ln\dfrac{1}{e^x+1}$ г) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}$

2.15 а) $y=x^2\sqrt[3]{x-1}$ б) $y=\sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

в) $y=\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ г) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x+2}$

2.16 а) $y=\sqrt{\dfrac{x+2}{3-x}}$; б) $y=e^{\frac{1}{x}}$;

в) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}$; г) $y=\operatorname{arctg}(e^{-x})$.

2.17 а) $y=3x^2-\sin x$; б) $y=\sin x\cdot\ln x$;

в) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^4}}{e^x}$; г) $y=\arccos(x^2+1)$.

2.18 а) $y=\dfrac{x^2-4}{\sqrt{2x-5}+3}$; б) $y=\dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$;

в) $y=\ln\sqrt[3]{x+1}$; г) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^3}$.

2.19 а) $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2}$; б) $y=\dfrac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\cos x}$;

в) $y=\ln(x+e^x)$; г) $y=\arcsin(\sqrt{x+1})$.

2.20 а) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; б) $y=\sin^3 x+\cos^3 x$;

в) $\ln(e^{-2x}+1)$; г) $y=\arcsin(\cos x)$.

2.21 а) $y = \frac{x^2}{\ln x}$; б) $y = e^{-x} \sin^2 x$;

в) $y = \frac{2}{\sqrt{x}} + 3\mathrm{ctg}x$; г) $y = \arcsin \frac{x}{x+1}$.

2.22 а) $y = \frac{e^x}{x^2} - \sqrt[3]{x^4 + 3}$; б) $y = \frac{\ln \mathrm{tg}x}{\sin x}$;

в) $y = \ln \frac{x^2}{x-1}$; г) $y = \mathrm{arctg}\sqrt[3]{x}$.

2.23 а) $y = e^{x^2 + 2x - 1}$; б) $y = \frac{\mathrm{ctg}^2 x}{\sin^2 2x}$;

в) $y = \ln \frac{x^2 - 1}{x+1}$; г) $y = \mathrm{arcctg} \frac{1}{x^4}$.

2.24 а) $y = \frac{x^2 - 9}{x^2 + 9}$; б) $y = e^{\sin^3 x}$;

в) $y = x \ln \sqrt{x+3}$; г) $y = \arcsin \frac{x+1}{x+2}$.

2.25 а) $y = \sqrt[3]{x^7} \cos x$; б) $y = \frac{\sin^3 2x}{\cos^3 x}$;

в) $y = \ln \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$; г) $y = \mathrm{arctg} \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$.

Задание 3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции f(x) на отрезке [a,b].

3.1 $f(x) = x - 2\sin x$, $a = 0$, $b = \pi$.

3.2 $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x}$, $a = -2$, $b = -\frac{1}{2}$.

3.3 $f(x) = x^2 e^{-x}$, $a = 1$, $b = 3$.

3.4 $f(x) = x^2 - \ln x$, $a = 1$, $b = 3$.

3.5 $f(x) = x - 3\ln x$, $a = 2$, $b = 4$.

3.6 $f(x) = \frac{1}{x} + 4x^2$, $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$.

3.7 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $a = 2$, $b = 4$.

3.8 $f(x) = \sqrt{169 - x^2}$, $a = -12$, $b = 5$.

3.9 $f(x) = x + \frac{2}{\sqrt{x}}$, $a = \frac{1}{4}$, $b = 4$.

3.10 $f(x) = \ln\cos x$, $a = -\frac{\pi}{3}$, $b = \frac{\pi}{3}$.

3.11 $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$, $a = \frac{1}{e}$, $b = e$.

3.12 $f(x) = \sin 2x - x$, $a = -\frac{\pi}{2}$, $b = \frac{\pi}{2}$.

3.13 $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 + x + 1}$, $a = -1$, $b = 3$.

3.14 $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, $a = -4$, $b = 4$.

3.15 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-2}}$, $a = 3$, $b = 11$.

3.16 $f(x) = \frac{x-3}{x^2 + 4}$, $a = 0$, $b = 3$.

3.17 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$, $a = 0$, $b = 1$.

3.18 $f(x) = \frac{x-1}{x^2 + 3}$, $a = -2$, $b = 3$.

3.19 $f(x) = \frac{1}{2}x - \cos x$, $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$.

3.20 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$, $a = \frac{1}{e}$, $b = e$.

3.21 $f(x) = \sin 2x - x$, $a = 0$, $b = \pi$.

3.22 $f(x) = \frac{x-2}{x^2 + 5}$, $a = -2$, $b = 6$.

3.23 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-5}}$, $a = 6$, $b = 9$.

3.24 $f(x) = x + \sin 2x$, $a = 0$, $b = \pi$.

3.25 $f(x) = \sin x - \sin 2x$, $a = 0$, $b = 2\pi$.

Задание 4. Произвести полное исследование функций и построить ее график.

4.1 $y = x^3 - 3x^2 + 3$. 4.2 $y = \frac{\ln x}{x}$.

4.3 $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$. 4.4 $y = 2 - 3x^2 - x^3$.

4.5 $y = x + \mathrm{arctg}x$. 4.6 $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$.

4.7 $y = \dfrac{(x-1)^2}{2 - x}$ 4.8 $y = 12x^2 - 8x^3 - 2$.

4.9 $y = xe^{-x^2}$. 4.10 $y = 1 + 3x + x^2 - \dfrac{x^3}{3}$.

4.11 $y = 3x^2 - 2 - x^3$. 4.12 $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3}{2}x^2 - 4x - 8$.

4.13 $y = xe^{2x}$. 4.14 $y = \dfrac{9}{2}x - \dfrac{x^3}{6}$.

4.15 $y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$ 4.16 $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 1$.

4.17 $y = 3x - x^3$. 4.18 $y = \dfrac{2x - 1}{x^2}$

4.19 $y = \dfrac{x + 1}{x^2 - 3}$ 4.20 $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$

4.21 $y = \dfrac{2}{x^2 + x + 1}$ 4.22 $y = \dfrac{x^2}{x - 4}$

4.23 $y = 10 + \dfrac{5}{2}x - x^2 - \dfrac{x^3}{6}$. 4.24 $y = \dfrac{x^3}{3} - 4x + 5$.

4.25 $y = \dfrac{x - 2}{x^2 - 4x + 5}$

Задание 5. Решить задачу.

5.1 Найти стороны прямоугольника наибольшего периметра, вписанного в полуокружность $y = \sqrt{20 - x^2}$.

5.2 Число 49 разложить как два таких множителя, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

5.3 Решеткой длиной 240 м нужно огородить прилегающую к дому прямоугольную площадку наибольшей площади. Определить размеры площади.

5.4 Круговой сектор имеет данный периметр L. Каков должен быть его радиус, чтобы площадь сектора была наименьшей?

5.5 Через точку $M_0(2,5)$ провести прямую с отрицательным угловым коэффициентом, чтобы площадь треугольника, образованного этой прямой и осями координат была наименьшей?

5.6 Найти высоту прямого кругового конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса R.

5.7 Число 20 разложить на два слагаемых так, чтобы произведение их было наибольшим.

5.8 Показать, что из всех треугольников данного периметра 2L, которые можно построить на одном и том же основании, наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник.

5.9 Боковые стороны и меньшее основание трапеции равны 10 см. Определить ее большее основание так, чтобы площадь трапеции была наибольшей.

5.10 Каковы должны быть размеры прямоугольника периметра P, чтобы его площадь была наибольшей?

5.11 Сумма длин гипотенузы и одного из катетов прямоугольного треугольника равна *a*. При какой величине угла между ними площадь треугольника будет наибольшей?

5.12 Сечение тоннеля имеет форму прямоугольника ,завершенного полукругом. Периметр сечения равен *p*. При каком радиусе полукруга площадь сечения будет наибольшей?

5.13 Цилиндрическая консервная банка должна иметь данный объем *V*. Каково должно быть отношение радиуса основания банки к ее высоте ,чтобы на ее изготовление ушло наименьшее количество материала?

5.14 Определить, каковы должны быть размеры открытого резервуара емкости 256 м^3, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала, если резервуар должен иметь форму прямоугольного параллепипеда с квадратным дном ?

5.15 Найти стороны прямоугольника наибольшей площади, вписанного в эллипс $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{18}=1$

5.16 При каком соотношении высоты и радиуса основание конической воронки данной вместимости *V*, на изготовление которой требуется наименьшее количество материала.

5.17 Найти наименьшую длину L забора, с помощью которой можно огородить участок в форме прямоугольника с данной площадью 72м^2, примыкающий к стене.

5.18 Найти стороны прямоугольника наибольшего периметра, вписанного в эллипс $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

5.19 Тело, имеющее объем V, представляет собой прямой круговой цилиндр, ограниченный сверху полусферой. При каких размерах полная поверхность этого тела будет наименьшей?

5.20 Каково должно быть соотношение между радиусом основания и высотой прямого кругового цилиндра ,чтобы при данном V он имел наименьшую полную поверхность?

5.21 Открытая емкость объемом V имеет форму цилиндра. Каковы должны быть ее радиус и высота, чтобы на изготовление этой емкости ушло наименьшее количество материала?

5.22 Одна из сторон прямоугольника совпадает с диаметром 2R полукруга. Каковы должны быть длины двух других сторон вписанного в этот полукруг треугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

5.23 Окно имеет форму прямоугольника, завершенного сверху правильным треугольником. Периметр окна равен L. При каких его размерах окно пропускает наибольшее количество света?

5.24 В полукруг вписана трапеция, основание которой есть диаметр полукруга. Определить угол при основании трапеции так, чтобы ее площадь была наибольшей.

5.25 Прямоугольная почтовая марка имеет площадь 100 мм и такие поля: сверху 6мм, а с остальных трех сторон по 4мм. Каковы размеры наибольшего напечатанного на марке текста.

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ 5
"Интеграл"

Выполняя данное задание, студент должен научиться применять основные методы интегрирования: метод разложения, метод замены переменной, интегрирование по частям; уяснить суть несобственных интегралов, научиться применять интеграл к решению простейших задач геометрии - вычислению площадей плоских фигур в декартовых координатах и нахождению объемов тел вращения.

Методические указания к выполнению задания.

Задача 1. Найти интеграл.

а) $\int \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^3}{x}dx$; б) $\int \frac{e^{2x}dx}{1-3e^{2x}}$;

в) $\int \frac{\ln x}{x^4}dx$; г) $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$;

Решение.

а)

$$\int \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^3}{x}dx = \int \frac{x^{\frac{3}{2}}-3x+3\sqrt{x}-1}{x}dx = \int x^{1/2}dx - 3\int dx + 3\int \frac{dx}{\sqrt{x}} - \int \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2} - 3x + 6\sqrt{x} - \ln|x| + C.$$

Результат интегрирования можно проверить дифференцированием:

$$\left(\frac{2}{3}x^{3/2} - 3x + 6\sqrt{x} - \ln|x| + C\right)' = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{1/2} - 3 + \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{x^{3/2} - 3x + 3\sqrt{x} - 1}{x} = \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^3}{x}.$$

б)

$$\int\frac{e^{2x}dx}{1-3e^{2x}}=\left|\begin{array}{l}e^{2x}=t\\2e^{2x}dx=dt\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1-3t}=\left|\begin{array}{l}1-3t=z\\dt=-\frac{1}{3}dz\end{array}\right|=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)\int\frac{dz}{z}=$$

$$=-\frac{1}{6}\ln|z|+C=-\frac{1}{6}\ln|1-3t|+c=-\frac{1}{6}\ln\left|1-3e^{2x}\right|+C.$$

в) $$\int\frac{\ln x}{x^4}dx=\left|\begin{array}{ll}\ln x=u & du=\frac{dx}{x}\\ \frac{dx}{x^4}=dv & v=-\frac{1}{3x^3}\end{array}\right|=-\frac{1}{3x^3}\ln x+\frac{1}{3}\int\frac{1}{x^3}\cdot\frac{du}{x}=-\frac{1}{3x^3}\ln x-$$

$$-\frac{1}{9x^3}+C=-\frac{1}{9x^3}(3\ln x+1)+C.$$

г) $$I=\int\frac{dx}{x^4-x^2};$$

Функция, стоящая под знаком интеграла, представляет собой правильную рациональную дробь. Разложим ее на сумму простейших:

$$\frac{1}{x^4-x^2}=\frac{1}{x^2\left(x^2-1\right)}=\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{A\left(x^2-1\right)}{x^2}+\frac{Bx\left(x^2-1\right)}{x}+\frac{Cx^2(x+1)}{x-1}+\frac{Dx^2(x-1)}{x+1};$$

$$1=A\left(x^2-1\right)+Bx\left(x^2-1\right)+Cx^2(x+1)+Dx^2(x-1);$$

$$\left.\begin{array}{r}x=0\\x=1\\x=-1\\x^3\end{array}\right|\begin{array}{l}1=-A\\1=2C\\1=-2D\\0=B+C+D\end{array}\quad\Rightarrow\quad\begin{array}{c}A=-1\\C=\frac{1}{2}\\D=-\frac{1}{2}\\B=0\end{array}$$

Таким образом, $\dfrac{1}{x^4-x^2}=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x+1}.$

Подставляя вместо подынтегральной функции это разложение, находим

$$I=-\int\frac{dx}{x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln|x+1|+C=\frac{1}{x}+\ln\sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}+C.$$

Задача 2. Вычислить определенный интеграл:

$$\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1+\mathrm{tg}^2 x}{(1+\mathrm{tg}x)^3}\,dx\ .$$

Решение.

$$\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1+\mathrm{tg}^2 x}{(1+\mathrm{tg}x)^3}\,dx = \left| \begin{array}{cc|c} \mathrm{tg}x = t, & t & x \\ x = \mathrm{arctg}t, & 1 & \pi/4 \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2}, & \sqrt{3} & \pi/3 \end{array} \right| = \int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{\left(1+t^2\right)}{(1+t)^3\left(1+t^2\right)}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2(1+t)^2}\Bigg|_1^{\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\left(1+\sqrt{3}\right)^2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8\left(2+\sqrt{3}\right)}\ .$$

Задача 3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$I = \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 4x + 9}\,.$$

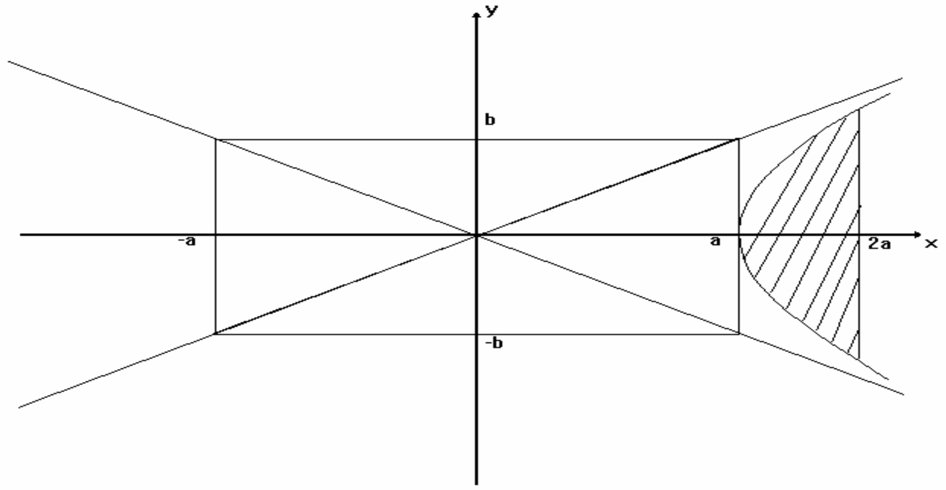
Решение:

$$I = \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 4x + 9} = \lim_{M\to\infty} \int \frac{dx}{(x-2)^2 + 5} = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathrm{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{5}}\Bigg|_0^M =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\lim_{M\to\infty} \mathrm{arctg}\frac{M-2}{\sqrt{2}} - \mathrm{arctg}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{arctg}\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Задача 4. Найти площадь фигуры, ограниченной прямой x=2a и гиперболой $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение. Сделаем схематический чертеж:



Как видно из рисунка, фигура симметричная, поэтому достаточно вычислить площадь ее половины и полученный результат умножить на два. Указанная площадь представляет собой криволинейную трапецию; ее величина находится известным образом, как соответствующий определенный интеграл. Таким образом имеем:

$$S_{\text{фиг}} = 2\int_a^{2a} y(x)dx = 2\frac{b}{a}\int_a^{2a}\sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \left| \begin{array}{ll} x = \dfrac{a}{\sin t}, & \begin{array}{c|c} t & x \\ \pi/2 & a \\ \pi/6 & 2a \end{array} \\ dx = -\dfrac{a\cos t}{\sin^2 t}dt, & \end{array} \right| =$$

$$= -2\frac{b}{a}\int_{\pi/2}^{\pi/6}\sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 t} - a^2}\,\frac{a\cos t}{\sin^2 t}dt = -2ab\int_{\pi/2}^{\pi/6}\frac{\cos^2 t}{\sin^3 t}dt = -2ab\int_{\pi/2}^{\pi/6}\frac{\cos^2 t\cdot\sin t}{\sin^4 t}dt =$$

$$= -2ab\int_{\pi/2}^{\pi/6}\frac{\cos^2 t\cdot\sin t}{\left(1-\cos^2 t\right)^2}dt = \left| \begin{array}{lccc} \cos t = z, & t & \pi/2 & \pi/6 \\ -\sin t dt = dz, & z & 0 & \sqrt{3}/2 \end{array} \right| = 2ab\int_0^{\sqrt{3}/2}\frac{t^2 dt}{\left(1-t^2\right)^2}.$$

$$\frac{t^2}{\left(1-t^2\right)^2} = \frac{t^2}{(1-t)^2(1+t)^2} =$$

$$= \frac{A(1+t)^2}{(1-t)^2} + \frac{B(1+t)^2(1-t)}{1-t} + \frac{C(1-t)^2}{(1+t)^2} + \frac{D(1+t)(1-t)^2}{1+t}$$

$$A(1+t)^2 + B(1+t)^2(1-t) + C(1-t)^2 + D(1+t)(1-t)^2 = t^2.$$

$$\begin{array}{c|c} t=1 & 4A=1 \\ t=-1 & 4C=1 \\ t^3 & -B+D=0 \\ t^0 & A+B+C+D=0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} A=\frac{1}{4}; \\ C=\frac{1}{4}; \\ D=-\frac{1}{4}; \\ B=-\frac{1}{4}. \end{array}$$

$$S_{фиг} = 2ab \int_0^{\sqrt{3}/2} \left(\frac{1}{4}\frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{1-t} + \frac{1}{4}\frac{1}{(1+t)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{1+t} \right) dt = \frac{ab}{2}\left(\frac{1}{1-t} - \frac{1}{1+t} - \right.$$

$$\left. - \ln|1-t| + \ln|1+t| \right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}/2} = \frac{ab}{2}\left[\frac{2t}{1-t^2} + \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| \right]\Bigg|_0^{\sqrt{3}/2} = \frac{ab}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{1-\frac{3}{4}} + \ln\left|\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right| \right)$$

$$= \frac{ab}{2}\left[4\sqrt{3} + \ln\left|\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right| \right] .$$

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ «Интеграл»

Задание 1. Найти неопределенные интегралы. Правильность полученных результатов проверить дифференцированием.

1.1 а) $\int (\sin x + \cos x)^2 dx$; б) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt[3]{e^x + 1}}$;

4.1 в) $\int (3x-1)\ln x dx$; г) Вычислить площадь, заключенную между кривой y = tg x, осью Ox и прямой $x = \pi / 3$.

1.2 а) $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} dx$; б) $\int \frac{x^2 dx}{\cos^2(x^3)}$;

в) $\int \frac{dx}{x^2 - 2x - 8}$; г) $\int \cos^3 x dx$;

1.3 а) $\int (e^x + e^{-x})^2 dx$; б) $\int \frac{\sin x dx}{1 - \cos x}$;

в) $\int x \ln(x-1) dx$; г) $\int \frac{2-x}{x^2 - 4x - 5} dx$;

1.4 а) $\int \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}} dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x} dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^2 + x - 2}$; г) $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$;

1.5 а) $\int \frac{x-6}{\sqrt{x}} dx$; б) $\int \frac{\sin 2x dx}{\cos^2 x + 1}$;

в) $\int \mathrm{arctg}(4x) dx$; г) $\int \frac{dx}{x^2 + x^3}$;

1.6 а) $\int x\sqrt{3 - x^2} dx$; б) $\int x e^{-x/2} dx$;

в) $\int \frac{\sqrt{x-2}}{1 + \sqrt{x-2}} dx$; г) $\int \sin 2x \cos 4x dx$;

1.7 а) $\int \frac{1 - \mathrm{tg} x}{\cos^2 x} dx$; б) $\int \frac{\sin 3x dx}{3 - \cos 3x}$;

в) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$;

1.8 а) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$; б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-2x}}$;

в) $\int \sin^3 5xdx$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-4x}$;

1.9 а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{9-x^2}}$; б) $\int \sin ex\sqrt{4-\cos^2 x}dx$;

в) $\int x\sin\frac{x}{2}dx$; г) $\int \frac{dx}{2x^2+11x+12}$;

1.10 а) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{4-\sin^2 x}}dx$; б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x+9}}$;

в) $\int xe^{-x/2}dx$; г) $\int \operatorname{tg}^2 xdx$;

1.11 а) $\int x^2\sqrt{2-x^3}dx$; б) $\int x3^x dx$;

в) $\int \sin^3 x\cos^2 xdx$; г) $\int \frac{dx}{x^2-2x;}$;

1.12 а) $\int \sin x\sqrt{1-\cos x}dx$; б) $\int (1+2x)e^{-x}dx$;

в) $\int \cos^3 xdx$; г) $\int \frac{dx}{x^2-x-12}$;

1.13 а) $\int \frac{1+x^3}{1+x}dx$; б) $\int \ln(2+x^2)dx$;

в) $\int \operatorname{tg}^2 xdx$; г) $\int \frac{x+9}{x^2+2x-3}dx$;

1.14 а) $\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt[3]{x}}dx$; б) $\int (2-x)\sin xdx$;

в) $\int \sin x\sin 2xdx$; г) $\int \frac{9-2x}{x^2-5x+6}dx$;

1.15 а) $\int \frac{\ln x}{x}dx$; б) $\int \operatorname{arctg} x\, dx$;

в) $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2}$;

1.16 а) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; б) $\int x^3\ln xdx$;

в) $\int \frac{dx}{3x+\sqrt{x}}$; г) $\int \sin^5 xdx$;

1.17 а) $\int \frac{dx}{5+4x^2}$; б) $\int \sqrt{x}\ln x dx$;

в) $\int (\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}^4 x)dx$; г) $\int \frac{11x-2}{x^2+x-2}dx$;

1.18 а) $\int \frac{dx}{3^{x+1}}$; б) $\int (1-2x)\sin 3x dx$;

в) $\int \mathrm{tg}^2 x dx$; г) $\int \frac{17-2x}{x^2-5x+4}dx$;

1.19 а) $\int \frac{x dx}{\sin^2(x^2)}$; б) $\int x 2^x dx$;

в) $\int \cos x \cos 3x dx$; г) $\int \frac{2x+9}{x^2+5x-6}dx$;

1.20 а) $\int \sin x 3^{\cos x} dx$; б) $\int \arcsin x dx$;

в) $\int \cos^3 x dx$; г) $\int \frac{11x-2}{x^2+x-2}dx$;

1.21 а) $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$; б) $\int x \ln(x-1)dx$;

в) $\int \sin 2x\sqrt{2-\cos^2 x}dx$; г) $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$;

1.22 а) $\int \frac{1-\ln x}{x}dx$; б) $\int x \arcsin x dx$;

в) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$; г) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$;

1.23 а) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}}$; б) $\int x\cos^2(2x)dx$;

в) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$; г) $\int \frac{3-2x}{x^2-4x}dx$;

1.24 а) $\int \frac{x dx}{\cos(x^2)}$; б) $\int x \ln(2x-3)dx$;

в) $\int \mathrm{tg}^3 x dx$; г) $\int \frac{2-x}{x^2-4x-5}dx$;

1.25 а) $\int \frac{x^2 dx}{8+x^3}$; б) $\int x \sin(2x-1)dx$;

в) $\int \cos x \cos 4x dx$; г) $\int \frac{dx}{1-\sqrt[3]{x}}$.

Задание 2. Вычислить определенный интеграл.

2.1 $\int\limits_9^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$; 2.2 $\int\limits_0^2 \ln(3x+1)dx$;

2.3 $\int\limits_0^{0{,}5\pi} \sin^3 x\cos^4 xdx$; 2.4 $\int\limits_0^{0{,}5\pi} \cos^3 xdx$;

2.5 $\int\limits_0^{0{,}5\pi} (3-x)\sin 2xdx$; 2.6 $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+5}$;

2.7 $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$; 2.8 $\int\limits_{-2}^2 (1-x)\ln \pi dx$;

2.9 $\int\limits_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{25-x^2}}$; 2.10 $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$;

2.11 $\int\limits_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$; 2.12 $\int\limits_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x-1}}$;

2.13 $\int\limits_1^2 \frac{dx}{2+\sqrt[4]{x-1}}$; 2.14 $\int\limits_0^{1/2} e^{\sin \pi x} \cos \pi xdx$;

2.15 $\int\limits_0^1 xe^{-x^2} dx$; 2.16 $\int\limits_{1/4}^{1/8} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$;

2.17 $\int\limits_0^3 \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x}}$; 2.18 $\int\limits_3^{12} \frac{\sqrt{x-3}dx}{x}$;

2.19 $\int\limits_0^2 x\sqrt{4-x^2}dx$; 2.20 $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+4}$;

2.21 $\int\limits_9^{16} \frac{\sqrt{x}dx}{x-6}$; 2.22 $\int\limits_{-8}^0 \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}+3}dx$;

2.23 $\int\limits_9^{16} \frac{\sqrt{x}dx}{x-3}$; 2.24 $\int\limits_0^1 x2^{-x^2} dx$;

2.25 $\int\limits_0^3 x\sqrt[3]{1-3x}\sqrt{4-x^2}dx$.

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

3.1 $\int\limits_0^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$;

3.2 $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$;

3.3 $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$;

3.4 $\int\limits_0^{\infty} x\cdot 3^{-x^2}\,dx$;

3.5 $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$;

3.6 $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{4+3x^2}$;

3.7 $\int\limits_0^{\infty} (2x+1)e^{-x^2-x}dx$;

3.8 $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+6x+10}$;

3.9 $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x}$;

3.10 $\int\limits_e^{\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$;

3. 11 $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$;

3.12 $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+6x+8}$;

3.13 $\int\limits_0^{\infty} x^2e^{-2x^3}\,dx$;

3.14 $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x-3}$;

3.15 $\int\limits_0^{\infty} \frac{2x-3}{(x^2-3x+1)^{3/2}}dx$;

3.16 $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2-5x+6}$

3.17 $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+6x+11}$;

3.18 $\int\limits_0^{\infty} \frac{3x^2+4x}{(x^2+2x^2+1)^2}dx$;

3.19 $\int\limits_0^{\infty} x\cdot 3^{-3x^2}\,dx$;

3.20 $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+7}$;

3.21 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$;

3.22 $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x(1+x)^2}$;

3.23 $\int \frac{\mathrm{arctg}x}{1+x^2}dx$;

3.24 $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{4+x^2}$;

3.25 $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$.

Задание 4. Решить задачу

4.1 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2 - x^2$, $y^3 = x^2$.

4.2 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $y = 3x$, $y = 0$ и находящейся в первой четверти.

4.3 Найдем площадь содержащуюся между локоном Аньези $y = \frac{a^2}{x^2 + a^2}$ и осью абсцисс.

4.5 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 6x - x^2$, $y = 0$.

4.6 Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 6x + 5$ и осью абсцисс .

4.7 Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной одной полуволной синусоиды y=sin x и отрезком $0 \le x \le \pi$ оси Ox вокруг оси Ox.

4.8 Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной одной полуволной синусоиды y=sin x и отрезком $0\le x \le\pi$ оси Ox вокруг оси Oy.

4.9 Найти объем тела, получающегося от вращения вокруг оси Ox площади, ограниченной осью Ox и параболой $y = ax - x^2$ (a>0).

4.10 Найти объем тела, образованного вращением площади, ограниченной линиями $y = e^x$, x = 0, y = 0 вокруг оси Ox.

4.11 Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями xy = 4, x = 1, x = 4, y = 0 вокруг оси Ox.

4.12 Определить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, y = b, y = - b.

4.13 Вычислить площадь фигуры , ограниченную кривыми $y = e^x$, $y = e^{-x}$ и прямой x = 1.

4.14 Вычислить площадь, заключенную между параболами $y = x^{2/3}$ и $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$.

4.15 Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{4 - x^2}$, y=0 вокруг оси Ox.

4.16 Вычислить площадь, заключенную между кривой y = tg x, осью Ox и прямой $x = \pi / 3$.

4.17 Найти площадь фигуры, ограниченной гиперболой $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и прямой x = 2a.

4.18 Вычислить площадь, ограниченную параболой $y = 2x - x^2$ и прямой y=-x.

4.19 Вычислить площадь фигуры, заключенной между параболами $y = 12 + 6x - x^2$ и $y = 2 - 2x + x^2$.

4.20 Найти объем тела, получающегося от вращения вокруг оси абсцисс фигуры, заключенной между параболами $y = 3 - x^2$ и $y = x^2 + 1$.

4.21 Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $y^2 = (x - 1)^3$, x = 2.

4.22 Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями xy = 9, y = 10 - x.

4.23 Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2$, y = 2x + 2.

4.24 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x$, xy=2, x=4.

4.25 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 6x - x^2$, 2x-y+3=0.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ
“Функции нескольких переменных”(ФНП)

После изучения данной темы и выполнения индивидуального задания студент должен:
- владеть понятием частных производных и дифференциалов функции нескольких переменных, уметь находить частные производные и дифференциалы различных порядков для функций 2-х и 3-х переменных;
- уметь провести исследование на экстремум функции 2-х переменных;
- уметь находить наибольшее и наименьшее значение функции 2-х переменных в замкнутой и ограниченной области;
- владеть понятиями градиента и производной по направлению; уметь найти градиент и производную по заданному направлению для конкретной функции 2-х или 3-х переменных.

Каждый вариант содержит 5 задач из различных разделов темы “Ф.Н.П.”

Условия к заданиям каждого варианта.

Задание 1. Найти частные производные указанных функций до второго порядка включительно. Убедиться, что $Z''_{xy} = Z''_{yx}$.

Задание 2. Найти полные дифференциалы указанных функций в точке M (x, y) при приращениях аргументов соответственно Δx и Δy.

Задание 3. Исследовать на экстремум следующие функции.

Задание 4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции z = f(x, y) в области $\overline{D}$,ограниченной заданными линиями.

Задание 5. Дана функция U(M)=U(x, y, z) и точки M_1 и M_2. Вычислить: а)производную этой функции в точке M_1 по направлению вектора $\overline{M_1M_2}$; б)grad U(M_1).

Приведем решение типового варианта:

Задача 1. $z = \arcsin(x^2 + y)$.

Решение. Находим частные производные первого порядка z'_x и z'_y

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y)^2}} \cdot 2x = \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2+y)^2}}$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y)^2}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y)^2}};$$

(Напоминаем, что частные производные ФНП находятся по тем же правилам и формулам, что и обычная производная, но при условии, что все переменные, кроме той, по которой вычисляется производная, не изменяются). Далее находим частные производные 2-го порядка:

$$z''_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{(2x)'_x\sqrt{1-\left(x^2+y\right)^2}-2x\left(\sqrt{1-\left(x^2+y\right)^2}\right)'_x}{1-\left(x^2+y\right)^2}=$$

$$=\frac{2\sqrt{1-\left(x^2+y\right)^2}-\dfrac{2x\left(-2\left(x^2+y\right)\right)2x}{2\sqrt{1-\left(x^2+y\right)^2}}}{1-\left(x^2+y\right)^2}=\frac{2\left[1-\left(x^2+y\right)^2\right]+4x\left(x^2+y\right)}{\left[1-\left(x^2+y\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$z''_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{(2x)'_y\sqrt{1-\left(x^2+y\right)^2}-2x\left(\sqrt{1-\left(x^2+y\right)^2}\right)'_y}{1-\left(x^2+y\right)^2}=$$

$$=\frac{x\cdot 2\left(x^2+y\right)\cdot 1}{\left[1-\left(x^2+y\right)^2\right]^{3/2}}=\frac{2x\left(x^2+y\right)}{\left[1-\left(x^2+y\right)^2\right]^{3/2}}.$$

$$z''_{yx}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\left[1-\left(x^{2\cdot}+y\right)^2\right]^{-3/2}\left(-2\cdot\left(x^2+y\right)\cdot 2x\right)=$$

$$=\frac{2x\left(x^2+y\right)}{\left[1-\left(x^2+y\right)^2\right]^{3/2}}$$

Убеждаемся, что $z''_{xy}=z''_{yx}$.

$$z''_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(\left[1-\left(x^2+y\right)^2\right]^{-1/2}\right)'_y=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\left[1-\left(x^2+y\right)^2\right]^{-3/2}\left(-2\cdot\left(x^2+y\right)\cdot 1\right)=\frac{x^2+y}{\left[1-\left(x^2+y\right)^2\right]^{3/2}}.$$

Задача 2. $z=5xy-2x^3y^2$.

Решение. Дифференциал функции двух переменных z = z(x, y) находим по формуле:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

Так как

$$\frac{\partial z}{\partial x}=5y-6x^2y^2 \text{ и } \frac{\partial z}{\partial y}=5x-4x^3y, \text{ то}$$

$$dz=(5y-6x^2y^2)\Delta x+(5x-4x^3y)\Delta y.$$

Задача 3. Исследовать на экстремум функцию двух переменных $z=x^3+y^3-3xy$.

Решение. Найдем вначале стационарные точки функции. Так как в данном случае $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ всегда существуют, то для нахождения стационарных точек получаем систему уравнений:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y=0;$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=3y^2-3x=0.$$

Решая эту систему уравнений, находим $x_1=0$, $x_2=1$, $y_1=0$, $y_2=1$.

Таким образом, получаем две стационарные точки $M_1(0,\ 0)$ и $M_2(1,\ 1)$. Далее находим частные производные второго порядка:

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x;\ B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-3;\ C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y.$$

Как известно, наличие или отсутствие экстремума в стационарной точке определяется значением величины $\Delta = AC - B^2$ в этой точке.

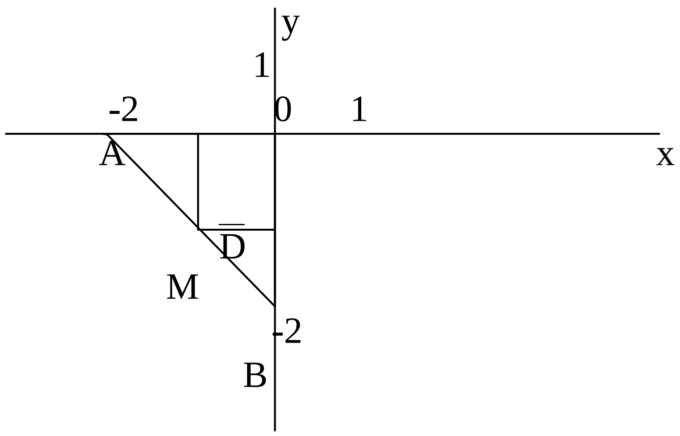
В точке $M_1(0, 0)$ величина $\Delta = 36xy - 9\big|_{M_1(0,0)} = -9 < 0$, т.е. в этой точке экстремума нет. В точке $M_2(1, 1)$ $\Delta = 36xy - 9\big|_{M_2(1,1)} = 36 \cdot 1 \cdot 1 - 9 = 27 > 0$ и A=6>0, следовательно, в этой точке данная функция достигает локального минимума: $z_{min} = -1$.

Задача 4. Найдем наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2$ в замкнутой области $\overline{D}: \{x+y+2=0,\ x=0,\ y=0\}$.

Решение. 1) Определим вначале стационарные точки функции:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y + 4 = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -2 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -1.$$

Таким образом, у функции есть одна стационарная точка M(-1, -1). Легко убедиться, что она лежит на границе области $\overline{D}$ (см.рис.). Вычисляем значение функции в этой точке z(M) = z(-1, -1) = 1 + 2 - 4 - 1 = - 2.



2) Исследуем теперь функцию на графике области D. Поскольку она состоит из отрезков OA, OB и AB, рассмотрим функцию на каждом из них.

а) На отрезке OA y = 0 функция z (x, y) превращается в функцию одной переменной z (x, 0), которую обозначим $z_1(x) = z(x,0) = x^2 + 4x$. Мы должны найти наибольшее и наименьшее значение этой функции на отрезке x ∈ [-2, 0]. Найдем критические точки:

$$\frac{dz_1}{dx} = 2x + 4 = 0 \quad => x = -2 \in [-2, 0].$$

Критическая точка совпала с концом отрезка, поэтому вычисляем значение функции только на концах отрезка:

$$z_1(0) = z(0,0) = 0; \;\; z_1(-2) = z(-2,0) = 4 - 8 = -4.$$

б) На отрезке ОВ $x = 0$ и $z(x, y) = z(0, y) = z_2(y) = -y^2$, где $y \in [-2, 0]$. Найдем критические точки $\dfrac{dz_2}{dy} = -2y = 0 \;=>\; y = 0 \in [-2,0]$.

Снова критическая точка совпадает с концом отрезка, причем $z_2(0) = z(0,0)$ мы уже вычислили в пункте а).Поэтому вычисляем только $z_2(-2) = z(0,-2) = -4$.

в) На отрезке АВ : $y = -2 - x$ и

$$z(x, y) = z(x,-2-x) = z_3(x) = x^2 + 2x(-2-x) + 4x - (-2-x)^2 = -4 - 4x,$$

где $x \in [-2, 0]$, т.к. $\dfrac{dz_3}{dx} = -4$, то критических точек эта функция не имеет, а ее значения на концах интервала уже вычислены:

$$z_3(0) = z(0,-2) = -4 \text{ и } z_3(-2) = z(-2,0) = -4.$$

Сравнивая все полученные значения функции z(x, y) в процессе исследования находим:

$$z_{\text{наиб}} = z(0,0) = 0, \; z_{\text{наим}} = z(-2,0) = z(0,-2) = -4.$$

Задача 5. Найдем производную функции $u(M) = 7x^3y^3z^3 - 5xy^2 + 3x^2y$ в точке $M_1(2, 4, 0)$ по направлению вектора $\overline{M_1M_2}$ (координаты точки $M_2(1, 5, 1)$. Определим вначале координаты вектора $\overline{M_1M_2}$ (-1, 1, 2) и его направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \frac{(\overline{M_1M_2})_x}{\left|\overline{M_1M_2}\right|} = \frac{-1}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 \;\; 1^2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos\beta = \frac{(\overline{M_1M_2})_y}{\left|\overline{M_1M_2}\right|} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \;\; \cos\gamma = \frac{(\overline{M_1M_2})_Z}{\left|\overline{M_1M_2}\right|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Далее по формуле

$$\frac{\partial u(M_1)}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_1} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{M_1} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{M_1} \cos\gamma$$

находим производную по направлению.

Так как

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_1} = 21x^2y^3z^3 - 5y^2 + 6xy\Big|_{M_1} = -5\cdot 4^2 + 6\cdot 2\cdot 4 = -32$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{M_1} = 21x^3y^2z^3 - 10xy + 3x^2\Big|_{M_1} = -10\cdot 2\cdot 4 + 6\cdot 2\cdot 4 = -32$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{M_1} = 21x^3y^3z^2\Big|_{M_1} = 0, \quad \text{то}$$

$$\frac{\partial u(M_1)}{\partial} = -32\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 68\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 0\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{36}{\sqrt{3}} = -12\sqrt{3}$$

Поскольку градиент функции u(M) - это вектор, координаты которого равны соответствующим частным производным, то есть

$$\operatorname{grad} u(M_1) = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_1}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{M_1}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{M_1}\vec{k},$$

$$\text{то}\quad \operatorname{grad} u(M_1) = -32\vec{i} - 68\vec{j} + 0\vec{k}.$$

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ
«Функции нескольких переменных»

Вариант № 1

1. $z = e^{x^2 - y^2}$;
2. $z = 2x^3y - 4xy^5$;
3. $z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y$;
4. $z = 3x + y - xy$: $\overline{D}$: $\{y = x,\ y = 4,\ x = 0\}$;
5. $u(M) = x^2y + y^2z + z^2x$, $M_1(1,\ -1,\ 2)$, $M_2(3,\ 4,\ -1)$.

Вариант № 2

1. $z = \mathrm{tg}\dfrac{x}{y}$;
2. $z = x^2y\sin x - 3y$;
3. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$;
4. $z = xy - x - 2y$; $\overline{D}$: $\{x = 3,\ y = x,\ y = 0\}$;
5. $u(M) = 5xy^3z^2$, $M_1(2,1,-1)$, $M_2(4,-3,0)$.

Вариант № 3

1. $z = \sin(x^2 - y)$;
2. $z = \mathrm{arctg}x + \sqrt{y}$;
3. $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$;
4. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, $\overline{D}$: $\{x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 2\}$;
5. $u(M) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $M_1(-1,2,1)$, $M_2(3,1,-1)$

Вариант № 4

1. $z = \cos(xy^2)$;
2. $z = 5xy^2 - 3x^3y^4$;
3. $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$;
4. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$, $\overline{D}$: $\{x - y + 1 = 0,\ x = 3,\ y = 0\}$;
5. $u(M) = x^2y + xz^2 - 2)$, $M_1(3,0,2)$, $M_2(2,-1,3)$.

Вариант № 5

1. $z = \arcsin(x^2 + y^2)$;
2. $z = e^{xy}$;
3. $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$
4. $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$, $\overline{D}$: $\{x = 0,\ y = 0,\ x + y - 1 = 0\}$;
5. $u(M) = 3xy^2 + z^2 - xyz$, $M_1(1,1,2)$, $M_2(3,-1,4)$

Вариант № 6

1. $z = \mathrm{arctg}(x + y)$;
2. $z = 7x^2y^2 - \sqrt{xy^3}$;
3. $z = x^3 + y^3 - 3xy$;
4. $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$, $\overline{D}$: $\{x = 0,\ y = 0,\ x + y - 2 = 0\}$;
5. $u(M) = y^2z - 2xyz + z^2$, $M_1(3,1,-1)$, $M_2(-2,1,4)$

Вариант № 7

1. $z = \arccos\sqrt{xy}$;
2. $z = \ln(x^2 + xy - y^2 + 1)$;
3. $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$;
4. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$, $\overline{D}$: $\{x = -3,\ y = 0,\ x + y + 1 = 0\}$;
5. $u(M) = x^2 + y^2 + z^2$, $M_1(-1,1,-2)$, $M_2(2,3,4)$

Вариант № 8

1. $z = \cos(3x^2 - 2y^3)$;
2. $z = \sqrt[3]{3x^2 - 2y^3 + 5}$;
3. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$;
4. $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1$, $\overline{D}$: $\{x = 5,\ y = 0,\ x - y - 1 = 0\}$;
5. $u(M) = 2x^2 + y^3 - 4z + 5$, $M_1(1,2,1)$, $M_2(-1,2,-1)$.

Вариант 9.

1. $z = \mathrm{tg}(4x + y^2)$;
2. $z = 3 - x^3y^3 + 5x^2$;
3. $z = xy(6 - x - y)$;

4. $z = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x, \quad \overline{D}: \{y = 2x,\ y = 2,\ x = 0\};$

5. $u(M) = 3x^2yz^3, \quad M_1(2,3,-1),\ M_2(5,-2,0)$

Вариант 10.

1. $z = \ln(3xy - 4)$;

2. $z = 7x - x^3y^2 + y^4$;

3. $z = xy - 3x^2 - 2y^2$;

4. $z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x, \quad \overline{D}: \{x = 0,\ x = 2,\ y = 0,\ y = 2\};$

5. $u(M) = x^2y + y^2z - 3z, \quad M_1(0,-2,-1),\ M_2(12,-5,0)$

Вариант 11.

1. $z = xe^{xy}$;

2. $z = x^2y^2 - 7xy^3 + 6y$;

3. $z = 17x^2 + 9y^2 - 24xy - 2x + 4$;

4. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 - 4, \quad \overline{D}: \{x = 0,\ x = 2,\ y = 0,\ y = 1\};;$

5. $u(M) = xy^2 + xyz + yx^2z, \quad M_1(1,-1,1),\ M_2(2,0,1)$.

Вариант 12

1. $z = x\sin(x + y) + y\cos(x - y)$;

2. $z = 3x^2 + 4y^3x + 15x$;

3. $z = x^2 + 5y^2 - 4xy + 6y + 5$;

4. $z = x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 2y - 1, \quad \overline{D}: \{x = 1,\ x = 4,\ y = -1,\ y = 2\};$

5. $u(M) = 2x - 4y^2x^3 + 3x + 1, \quad M_1(0,1,2),\ M_2(3,4,1)$.

Вариант 13

1. $z = \mathrm{arctg}(y + x^2)$;

2. $z = 2xy^3 - xy + 4y^2 - 3$;

3. $z = 4 - 2x^2 - y^2 - 2xy + 2x$;

4. $z = 2x^3 - xy^2 + y^2 - 1, \quad \overline{D}: \{x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 3\};$

5. $u(M) = 5x^2y^4 - 3x^2y + 5yz, \quad M_1(1,0,2),\ M_2(-1,-1,3)$

Вариант 14

1. $z = x\arcsin(x+2y)$;
2. $z = \sqrt{x^2y - y^2x}$;
3. $z = 6 + 2xy - x^2 - 2y^2 - 2y$;
4. $z = 2x^3 + 3y^2 + 1, \quad \overline{D}: \{y = 0,\ y = -2,\ x = 1,\ x = 3\}$;
5. $u(M) = 2x^2 - 3xyz + z^3, \quad M_1(0,-1,2),\ M_2(1,0,3)$

Вариант 15

1. $z = y\,\mathrm{arctg}(2x - y)$;
2. $z = \sqrt[3]{xy - 3x^2 + 1}$;
3. $z = 2(x-y) - x^2 - y^2 + 4$;
4. $z = z^2 - 2xy - y^2, \quad \overline{D}: \{x = 5,\ y = 0,\ x - y - 2 = 0\}$;
5. $u(M) = 5x^3y^3 - 3z^2y + z^3, \quad M_1(-1,1,2),\ M_2(1,3,-1)$.

Вариант 16

1. $z = e^{xy} + \sin(x+y)$;
2. $z = \ln(x^3 + y^3 - xy)$;
3. $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$;
4. $z = 3x^2 + y^2 - x - y + 1, \quad \overline{D}: \{x = 5,\ y = 0,\ x - y - 1 = 0\}$;
5. $u(M) = 2xy + x^2z + z^2y, \quad M_1(0,1,2),\ M_2(-1,1,2)$

Вариант 17

1. $z = \cos(3x + y) - x^2$;
2. $z = \ln(e^x + e^{-y})$;
3. $z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 8$;
4. $z = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x, \quad \overline{D}: \{y = 2x,\ y = 2,\ x = 0\}$;
5. $u(M) = 2xz^3 - 3x^2y + \sqrt{z}, \quad M_1(1,2,3),\ M_2(-1,3,-1)$

Вариант 18

1. $z = y^2x - \sin(x - y)$;
2. $z = \ln\sin(3x - 4y)$;
3. $z = xy(12 - x - y) + 4$;

4. $z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x + 3$, $\overline{D}$: $\{x = 0,\ x = 2,\ y = 0,\ y = 2\}$;
5. $u(M) = 5xyz - y^2z + x^2$, $M_1(-1,2,0)$, $M_2(1,3,4)$

Вариант 19

1. $z = xy^3 + e^{2xy}$;
2. $z = \sqrt[4]{x^3y - xy^3}$;
3. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y - 2$;
4. $z = xy - 3x - 2y + 4$, $\overline{D}$: $\{x = 0,\ x = 3,\ y = -1,\ y = 4\}$;
5. $u(M) = x^2y^2z^2 - 2x + 2y + 3z$, $M_1(1,1,1)$, $M_2(0,2,3)$

Вариант 20

1. $z = y\,\mathrm{arctg}(x^2 + y)$;
2. $z = \ln \mathrm{tg}(4x - y)$;
3. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 12$;
4. $z = x^2 + xy - 2$, $\overline{D}$: $\{x = 0,\ y = 0,\ x + y = 4\}$;
5. $u(M) = xz^3 - z^2y + 2xyz$, $M_1(0,1,2)$, $M_2(1,-1,2)$

Вариант 21

1. $z = x \arcsin y^2$;
2. $z = \sin(x^2 + 3y^3)$;
3. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$;
4. $z = x^2y(4 - x - y)$, $\overline{D}$: $\{x = 0,\ y = 0,\ y = 6 - x\}$;
5. $u(M) = \sqrt{zx} + x^2 + 4xy^2z$, $M_1(1,2,1)$, $M_2(3,4,-1)$

Вариант 22

1. $z = \arccos(x - y) + 3y^3x$;
2. $z = \mathrm{tg}(x^2 + 3xy^3)$;
3. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 2$;
4. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$, $\overline{D}$: $\{x + 2y = 4,\ x - 2y = 4,\ x = 0\}$;
5. $u(M) = 4x^2y + 4xz^3$, $M_1(1,1,1)$, $M_2(3,3,2)$

Вариант 23

1. $z = \cos(x^2 y^2) - 4xy$;
2. $z = \mathrm{arctg}(x + 4y)$;
3. $z = 6xy - x^2 y - xy^2 + 8$;
4. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x, \quad \overline{D}: \{x = 3,\ y = 0,\ y = x + 1\}$;
5. $u(M) = x^2 yz - 6xz^3, \quad M_1(0,2,3),\ M_2(1,4,4)$

Вариант 24

1. $z = xye^{x^2 y}$;
2. $z = \mathrm{tg}(2x - 4y)$;
3. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$;
4. $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y, \quad \overline{D}: \{x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 2\}$;
5. $u(M) = zxy - 3z^2 y^3 + 4x, \quad M_1(1,-1,1),\ M_2(2,1,-1)$

Вариант 25

1. $z = \mathrm{tg}(2x - y) + x^2 y^2$;
2. $z = \sqrt[3]{\sin(x^2 + y^2)}$;
3. $z = x^2 + 2y^2 - 2x + 4$;
4. $z = 4 - 2x^2 - y^2, \quad \overline{D}: \{y = 0,\ y = 2,\ x = -1,\ x = 1\}$;
5. $u(M) = x^2 y + y^2 z + z^2 x, \quad M_1(1,1,1),\ M_2(2,2,3)$

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ 7
“Дифференциальные уравнения”(ДУ)

После изучения данной темы и выполнения индивидуального задания студент должен:

- владеть понятиями общей и частного решений обыкновенного ДУ;
- уметь решать ДУ первого порядка следующих видов: 1) с разделяющимися переменными; 2) однородные относительно переменных; 3) линейные; 4) уравнения Бернулли;
- уметь решать уравнения 2-го порядка, допускающие понижение порядка;
- знать теоремы о структуре общего решения линейных однородных и неоднородных уравнений 2-го порядка, уметь находить общие и частные решения таких уравнений с постоянными коэффициентами и правой части специального вида;
- уметь решать системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами одним из методов.

Каждый вариант содержит двенадцать задач из различных разделов темы ”Дифференциальные уравнения”.

Условия к заданиям каждого варианта

Задание 1-6. Найти общее или частное (в тех задачах, где заданы начальные условия) решение (интеграл) заданного дифференциального уравнения.

Задание 7-8. Найти общее или частное решение (интеграл) дифференциального уравнения 2-го порядка.

Задание 9-10. Найти общее или частное (при наличии начальных условий) решение линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Задание 11-12. Найти общее решение системы линейных ДУ.

Приведем решение типового варианта.

Задача 1. Найти общее решение (интеграл) ДУ 1-го порядка:

$$(9 + y^2)dx = 2xdy.$$

Решение. Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, получаем:

$$\frac{dx}{x} = \frac{2ydy}{9 + y^2}$$

Интегрируя, находим $\ln|x| = \ln\left|9 + y^2\right| + \ln C$. Или $x = C(9 + y^2)$.

Задача 2. Найдем общее решение (интеграл) ДУ 1-го порядка:

$$x^2 dy + (y - 5)dx = 0$$

Решение. Это уравнение также с разделяющимися переменными:

$$\frac{dx}{x^2} = -\frac{dy}{y - 5}$$

Интегрируя, получаем: $-\frac{1}{x} = -\ln|y - 5| + \ln C$, или

$$\ln|y - 5| = \frac{1}{x} + \ln C \quad \Rightarrow y - 5 = Ce^{\frac{1}{x}} \quad \Rightarrow y = 5 + Ce^{\frac{1}{x}}.$$

Задача 3. Найдем частное решение ДУ 1-го порядка

$$xydy - y^2 dx = (x + y)^2 dx, \quad y(1) = 0.$$

Решение. Поделим обе части уравнения на $xydx \neq 0$:

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{xy}; \quad \Rightarrow \quad y' - \frac{y}{x} = \left(\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x}\right)$$

Теперь видно, что это уравнение однородное относительно переменных. Решаем его, используя замену $u = \frac{y}{x}$ или y=ux. Тогда $y' = u'x + u$ и уравнение принимает вид:

$$u'x + u - u = \left(\frac{1}{u} + 2 + u\right) \quad \text{или} \quad x\frac{du}{dx} = \frac{u^2 + 2u + 1}{u}.$$

Разделяя переменные, получаем

$$\frac{udu}{(u+1)^2} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируем:

а) $\int \frac{udu}{(u+1)^2} = \int \frac{(u+1)-1}{(u+1)^2} du = \ln|u+1| + \frac{1}{u+1} + C;$

б) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C_1.$

Общий интеграл имеет вид:

$$\ln\left|\frac{y}{x}+1\right| + \frac{1}{\frac{y}{x}+1} + C = \ln|x| \quad \text{или} \quad \ln\left|\frac{y+x}{x}\right| + \frac{x}{y+x} + C = \ln|x|.$$

Используя начальные условия, найдем С. Подставляем в общий интеграл вместо x - 1, вместо y - 0.

$$\ln 1 + \frac{1}{0+1} + C = \ln 1.$$

Отсюда С=-1 и частный интеграл имеет вид:

$$\ln\left|\frac{y+x}{x}\right| + \frac{x}{y+x} - 1 = \ln|x|, \quad \text{или} \quad \ln\left|\frac{y+x}{x^2}\right| = \frac{y}{y+x}$$

Задача 4-5. Найдем частные решения уравнения $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ при начальном условии y(1)=2.

Решение. Уравнение линейное, для его решения воспользуемся методом Бернулли. Пусть y=u(x)v(x). Тогда

$$u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Выберем функцию v(x) так, чтобы она удовлетворяла уравнению: $v' + \frac{1}{x}v = 0$, тогда функция u(x) должна удовлетворять уравнению:

$$vu' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Найдем вначале V(x):

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x} \quad \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}; \quad \Rightarrow v = x^{-1}.$$

Тогда для определения u(x) получаем уравнение:

$$\frac{1}{x}\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

После разделения переменных

$$du = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad \text{откуда} \quad u = -\sqrt{1-x^2} + C,$$

а общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y = u(x) \cdot v(x) = \frac{1}{x}(C - \sqrt{1-x^2}).$$

Определим константу C так, чтобы выполнялось начальное условие y(1)=2:

$$2 = \frac{1}{1}(C - \sqrt{1-1}); \quad C = 2.$$

Таким образом, получаем искомое частное решение: $y = \frac{1}{x}(2 - \sqrt{1-x^2})$.

(Второе уравнение в задачах 4-5 также линейное и его можно решать приведенным выше методом).

Задача 6. Найдем общее решение уравнения

$$3(xy' + y) = y^2 \ln x \quad \text{или} \quad y' + \frac{1}{x}y = \frac{y^2}{3x}\ln x.$$

Решение. Это уравнение Бернулли 1-го порядка и его можно решать тем же методом, что и линейные уравнения.

Если y=uv, то функции u и v должны удовлетворять следующей системе уравнений

$$\begin{cases} v' + \dfrac{1}{x} v = 0 \\ vu' = \dfrac{u^2 v^2}{3x} \ln x \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{v}{x} \\ \dfrac{du}{dx} = \dfrac{u^2 v}{3x} \ln x \end{cases}$$

Решаем первое уравнение:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}; \;\Rightarrow\; \ln|v| = -\ln|x| \;\Rightarrow\; v = x^{-1}.$$

Тогда $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{u^2}{3x^2} \ln x$. Разделяем переменные $\dfrac{du}{u^2} = \dfrac{dx}{3x^2} \ln x$. Интегрируем:

а) $\int \dfrac{du}{u^2} = -\dfrac{1}{u} + C$;

б) $\int \dfrac{\ln x dx}{3x^2} = \left\{ \begin{matrix} s = \ln x; & dt = \dfrac{dx}{3x^2} \\ ds = \dfrac{dx}{x}; & t = -\dfrac{1}{3x} \end{matrix} \right\} =$ (для вычисления этого интеграла используем метод интегрирования по частям) $= -\dfrac{1}{3x} \ln x + \dfrac{1}{3} \int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{3x} \ln x - \dfrac{1}{3x} + C_1$.

Тогда

$$-\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{3x} \ln x - \frac{1}{3x}, \;\; \text{или} \;\; u = \frac{\ln x + 1 + 3Cx}{3x}; \;\; u = \frac{3x}{\ln x + 3Cx + 1},$$

и общее решение имеет вид

$$y = uv = \frac{1}{x} \frac{3x}{\ln x + 3Cx + 1}.$$

Задача 7. Найдем частное решение уравнения второго порядка $(1 + x^2)y'' + 2xy' + 2 = 0$ при начальных условиях $y(0) = y'(0) = 1$.

Решение. Уравнение не содержит y, поэтому сделаем замену $y' = p(x)$, тогда $y'' = p'(x)$ и уравнение принимает вид:

$$\left(1 + x^2\right)p' + 2xp = -2.$$

Разделив обе части на $1 + x^2 \neq 0$, получаем

$$\frac{dp}{dx}+\frac{2x}{1+x^2}p=-\frac{2}{1+x^2}.$$

Это линейное уравнение, решаем его методом Бернулли: $p=u(x)\cdot v(x)$,

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dx}+\dfrac{2x}{1+x^2}v=0\\ v\dfrac{du}{dx}=-\dfrac{2}{1+x^2}\end{cases}$$

Решаем первое уравнение системы

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{2x}{1+x^2}v;\ \Rightarrow\ \frac{dv}{v}=-\frac{2x}{1+x^2}dx;\ \Rightarrow\ \ln|v|=-\ln\left|1+x^2\right|;\ \Rightarrow\ v=\frac{1}{1+x^2}.$$

Тогда $\dfrac{1}{1+x^2}\dfrac{du}{dx}=-\dfrac{2}{1+x^2}$; откуда du = -2dx, u = -2x + C_1.

Итак, $p(x)=(-2x+C_1)\dfrac{1}{1+x^2}$.:

Возвращаясь к переменной y, получаем $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2x+C_1}{1+x^2}$. Определим C_1 из начального условия $y'(0)=1$

$$1=\frac{-2\cdot 0+C_1}{1+0^2};\ \Rightarrow\ C_1=1.$$

Итак, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-2x}{1+x^2}$. Интегрируя, находим y:

$$y=\int\frac{1-2x}{1+x^2}dx=\int\frac{dx}{1+x^2}-\int\frac{2xdx}{1+x^2};$$

$$y=\operatorname{arctg}x-\ln(1+x^2)+C_2.$$

C_2 определяем из начального условия y(0)=1:

$$1=\operatorname{arctg}0-\ln(1+0^2)+C_2\ \text{откуда}\ C_2=1.$$

Окончательно,

$$y = \operatorname{arctg}x - \ln(1+x^2)+1.$$

Задача 8. Найти общее решение уравнения второго порядка $yy'' - 4 = -(y')^2$.

Решение. Это уравнение не содержит в явном виде x, поэтому делаем замену $y' = p(y)$. Тогда $y'' = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$. Уравнение принимает вид:

$$py\frac{dp}{dy} - 4 = -p^2.$$

Получили уравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными

$$py\frac{dp}{dy} = 4 - p^2; \;\Rightarrow\; \frac{pdp}{4 - p^2} = \frac{dy}{y} \;\Rightarrow\; \int\frac{pdp}{4 - p^2} = \int\frac{dy}{y} \;\Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|4 - p^2\right| = \ln|y| - \frac{1}{2}\ln|C_1| \;\Rightarrow\; \ln\left|4 - p^2\right| = \ln\left|\frac{C_1}{y^2}\right| \;\Rightarrow\; 4 - p^2 = \frac{C_1}{y^2} \;\Rightarrow$$

$$p^2 = 4 - \frac{C_1}{y^2} \;\Rightarrow\; p = \pm\frac{\sqrt{4y^2 - C_1}}{y}$$

Поскольку $p = \frac{dy}{dx}$, то $\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{4y^2 - C_1}}{y}$, или $\frac{ydy}{\sqrt{4y^2 - C_1}} = \pm dx.$

Интегрируя последнее уравнение, находим:

$$\pm\frac{ydy}{\sqrt{4y^2 - C_1}} = x + C_2,\text{ или } \pm\frac{1}{2}\sqrt{4y^2 - C_1} = C_2 + x$$

Отсюда $y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{C_1 \pm 2(C_2 \pm x)}$.

Задача 9. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения (ЛНДУ) с постоянными коэффициентами $y'' - 7y' + 10y = e^{2x}$.

Решение. Как известно это решение является суммой общего решения однородного уравнения $y_{о.о.}$ и частного решения неоднородного $y_{ч.н.}$ Запишем соответствующее однородное уравнение:

$$y'' - 7y' + 10y = 0.$$

Его характеристическое уравнение имеет вид :

$$к^{2}-7к+10=0.$$

$$к_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49-40}}{2}=\frac{7\pm 3}{2};\quad к_{1}=2;\quad к_{2}=5.$$

В соответствии с корнями характеристического уравнения записываем общее решение однородного уравнения:

$$y_{о.о.}=C_{1}e^{2x}+C_{2}e^{5x}.$$

Частное решение однородного уравнения будем искать в виде

$$y_{ч.н.}=Axe^{2x},$$

где А - коэффициент, подлежащий определению (множитель x появился из-за того что множитель 2 в показателе экспоненты является простым корнем характеристического уравнения). Для определения коэффициента А, найдем $y'_{ч.н.}$ и $y''_{ч.н.}$ и подставим их в исходное ДУ:

$$\begin{array}{r|l} 10 & y_{ч.н.}=Axe^{2x}. \\ -7 & y'_{ч.н.}=Ae^{2x}+2Axe^{2x}. \\ 1 & y''_{ч.н.}=2Ae^{2x}+2Ae^{2x}+4Axe^{2x}. \\ \hline \end{array}$$

$$10Axe^{2x}-7Ae^{2x}-14Axe^{2x}+4Ae^{2x}+4Axe^{2x}=e^{2x}$$

$$-3Ae^{2x}=e^{2x};\quad\Rightarrow\quad -3A=1;\ \Rightarrow\ A=-\frac{1}{3}$$

Итак, $y=C_{1}e^{2x}+C_{2}e^{5x}-\frac{1}{3}xe^{2x}.$

Задача 10. Найти частное решение ЛНДУ 2-го порядка $y''+4y=8\cos 2x$, удовлетворяющее начальным условиям y(0) = 0; $y'(0)=1$.

Решение. Общее решение этого уравнения равно $y=y_{о.о.}+y_{ч.н.}$ Найдем общее решение однородного уравнения

$$y''+4y=0\ \Rightarrow\ к^{2}+4=0\ \Rightarrow\ к_{1,2}=\pm 2i$$

$$y_{о.о.}=C_{1}\cos 2x+C_{2}\sin 2x$$

Число r_i является корнем характеристического уравнения, поэтому частные решения ЛНДУ ищем в виде:

$$y_{\text{ч.н.}} = x(A\sin 2x + B\cos 2x),$$

где A и B - коэффициенты подлежащие -определению. Их находят подставляя $y_{\text{ч.н.}}$ и ее производные в исходное уравнение:

$$\begin{array}{c|l}
4 & y_{\text{ч.н.}} = x(A\sin 2x + B\cos 2x), \\
0 & y'_{\text{ч.н.}} = A\sin 2x + B\cos 2x + x(2A\cos 2x - 2B\sin 2x) \\
1 & y''_{\text{ч.н.}} = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x + 2A\cos 2x - 2B\sin 2x + \\
 & \qquad + x(-4A\sin 2x - 4B\cos 2x) \\
\hline
 & 4x(A\sin 2x + B\cos 2x) + 4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 4x(A\sin 2x + B\cos 2x) = \\
 & = 8\cos 2x
\end{array}$$

Отсюда 4Acos2x - 4Bsin2x = 8cos2x.

Сравнивая коэффициенты при sin2x в правой и в левой частях, а затем при cos2x, получаем:

$$4A=8 \Rightarrow A=2; \; -4B=0 \Rightarrow B=0.$$

Итак,

$$y_{\text{ч.н.}} = 2x\sin 2x \, .$$

Общее решение ЛНДУ имеет вид:

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + 2x\sin 2x.$$

Постоянные C_1 и C_2 находим из начальных условий :

$$y(0) = 0 \;\Rightarrow\; C_1 = 0$$
$$y' = -2C_1\sin 2x + 2C_2\cos 2x + 2\sin 2x + 4x\cos 2x$$
$$y'(0) = 2C_2 = 1; \;\Rightarrow\; C_2 = \frac{1}{2}$$

Таким образом, искомое решение имеет вид:

$$y = (2x + \frac{1}{2})\sin 2x$$

Задача 11-12. Найдем общее решение системы линейных уравнений методом исключения:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$$

Решение. Из второго уравнения системы $x = y + \dfrac{dy}{dt}$, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{d^2y}{dt^2}$. Подставляя эти выражения в первое уравнение, получаем

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 3y + 3\frac{dy}{dt} + y = 0 \text{ или } \frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0.$$

Характеристическое уравнение: $к^2 + 4к + 4 = 0.$имеет один двукратный корень к= -2. Поэтому $y = (C_1 + C_2 t)e^{-2t}$

Найдем $\dfrac{dy}{dt}$:

$$\frac{dy}{dt} = C_2 e^{-2t} - 2(C_1 + C_2 t)e^{-2t}.$$

Тогда

$$x = C_2 e^{-2t} - (C_1 + C_2 t)e^{-2t}; \;\; x = (C_2 - C_1 - C_2 t)e^{-2t}$$

Итак,

$$\begin{cases} x = (C_2 - C_1 - C_2 t)e^{-2t} \\ y = (C_1 + C_2 t)e^{-2t} \end{cases}$$

(Система уравнений в задаче №12 может быть решена таким же методом).

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ
«Дифференциальные уравнения»

Вариант 1

1) $2x\sqrt{1-y^2}dx + ydy = 0;$

2) $e^y(1+x^2)dy = 2x(1+e^y)dx;$

3) $xy' = y\ln\frac{y}{x}; \quad y(1)=1;$

4) $y' - \frac{y}{x} = x^2;$

5) $y' - \frac{3}{x}y = \frac{2}{x^3}; \quad y(1)=1;$

6) $2(y'+xy) = (x-1)e^x y^2;$

7) $2xy'y'' = (y')^2 + 1;$

8) $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2; \quad y(0) = y'(0) = 1;$

9) $y'' + 3y' = 3xe^{-3x};$

10) $y'' + 4y = \sin x; \quad y(0) = y'(0) = 1;$

11) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4y + x \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases};$

12) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - 3x \\ \frac{dy}{dt} = y - 2x \end{cases}.$

Вариант 2

1) $x^3y' + y = 7;$

2) $(1+y^2)dx = xydy;$

3) $y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}; \quad y(1) = 0;$

4) $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x;$

5) $y' - \frac{1}{x}y = x^2; \quad y(1) = 0{,}5;$

6) $xy' + y = 2y^2\ln x;$

7) $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1); \quad y(2) = 1;$
$y'(2) = -1;$

8) $yy'' = 2(y')^2;$

9) $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3;$

10) $y'' + 1y = -24\sin 4x;$

11) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = x - y \end{cases};$

12) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y \end{cases}.$

Вариант 3

1) $x^2dy + (y-5)dx = 0;$

2) $x^2y^2y' + 1 = y;$

3) $xy' = y\ln\frac{y}{x} + y;\quad y(1) = e;$

4) $y' - \frac{x}{x^2+1}y = (x^2+1)^{\frac{3}{2}};$

5) $y'\cos^2 x + y = \mathrm{tg}x;\quad y(0) = 0;$

6) $y' - xy + y^3e^{-x^2} = 0;$

7) $y''x\ln x = y';$

8) $y'' = y'e^y;\quad y(0) = y'(0) = 1;$

9) $y'' - 8y' + 12y = -65\cos 4x;$

10) $y'' - y = 8e^x;\quad y(0) = 2;\ y'(0) = 4;$

11) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - z \\ \frac{dz}{dt} = z \end{cases};$

12) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}.$

Вариант 4

1) $(x^2 + x)dy = (2y+1)dx;$

2) $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x}dx = 0;$

3) $xdy = (y + \sqrt{x^2+y^2})dx;$ $y(1) = 0;$

4) $y' - y\mathrm{tg}x = \sin^2 x;$

5) $(9 + x^2)y' + xy = 1;$

6) $xy' - y = -y^2(\ln x + 2)\ln x;$

7) $y''\mathrm{tg}x = y' + 1;$

8) $yy'' - (y')^2 = 0;\quad y(0) = 1;\ y'(0) = 2;$

9) $y'' - 2y' + y = x^3;$

10) $y'' + y = 2\cos x;\quad y(0) = 1;\ y'(0) = 0;$

11) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases};$

12) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 3x + 4y = 0 \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 5 \end{cases}.$

Вариант 5

1) $y' = e^{x-2y};$

2) $x\sqrt{4-y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0;$

3) $(y + \sqrt{x^2+y^2})dx - xdy = 0;$ $y(1) = 0;$

4) $y' - \frac{y}{x} = x\sin x;$

5) $y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\quad y(1) = 2;$

6) $(1-x^2)y' - xy = 2xy^2;$

7) $y'' + \frac{y'}{x} = x;\ y(1) = y'(1) = 1;$

8) $yy'' + (y')^2 - (y')^2 = 0;$

9) $y'' - 3y' = x;\ y(0) = 0;\ y'(0) = 1;$

10) $y'' + 25y = \cos 5x;$

11) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 3y \end{cases};$

12) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 2y \end{cases}.$

Вариант 6

1) $x + xy = -(y + xy)y';$

2) $2y'\sqrt{x} = y;$

3) $xydy - y^2dx = (x + y)^2 e^{-\frac{y}{x}} dx;$
$y(e) = 1;$

4) $y' + \frac{y}{x+1} = \sin 2x;$

5) $t^2 \frac{ds}{dt} = 2ts - 3;\ \ s(-1) = 1;$

6) $3(xy' + y) = y^2 \ln x;$

7) $3y'y'' = e^y;$

8) $xy'' \ln x = y';$

9) $y'' + 4y = \cos 2x;$

10) $y'' - 3y' = 3(2 - x^2);\ \ y(0) = 0;\ y'(0) = 1;$

11) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x - y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y \end{cases};$

12) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 4y \end{cases}.$

Вариант 7

1) $\mathrm{tg}x \sin^2 y dx + \cos^2 x \,\mathrm{ctg} y dy = 0;$

2) $y'y\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0;$

3) $(x^2 - 3y^2) + 2xyy' = 0;$
$y(2) = 4;$

4) $y' + \frac{y}{3+x} = \ln x;$

5) $y' - \frac{1}{x}y = x\sin x;\ \ y(\pi) = 0;$

6) $yy' + \frac{1}{2}y^2 = \sin x;$

7) $y'' + y'\mathrm{tg}[= \sin 2x + 1;$
$y'(0) = 0;\ y'(0)\ \text{-}1;$

8) $y'' = (y')^{-2};$

9) $y'' + y' - 6y = xe^{2x};$

10) $y'' + 4y = \sin x;\ \ y(0) = y'(0) = 1;$

11) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 6y \end{cases}$; 12) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y \end{cases}$.

Вариант 8

1) $2xy' + y^2 = 1$; 2) $y(4 + e^x)dy - e^x dx = 0$;

3) $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2)$; $y(1) = 1$; 4) $xy' + y = x\sin x$;

5) $y' - \dfrac{1}{x}y = x^3 + 2$; $y(1) = \dfrac{1}{3}$; 6) $y' + 4x^3 y = 4y^2 e^{4x}(1 - x^3)$;

7) $y''y^5 + 2 = 0$; $y(0) = y'(0) = 1$; 8) $xy'' - y' = x^2 e^x$;

9) $y'' + 2y' + 5y = 4\sin x$; 10) $y'' + y' = e^x$; $y(0) = y'(0) = 1$;

11) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y - 2z \\ \dfrac{dy}{dt} = 3y + 4z \end{cases}$; 12) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y - 2x \end{cases}$.

Вариант 9

1) $\sqrt{y}dx + \sqrt{x}dy = 0$; 2) $y' = y\cos x$;

3) $xy'(\ln y - \ln x) = y$; $y(e) = 1$; 4) $(x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x$;

5) $y' - \dfrac{1}{x}y = x\mathrm{tg}x$; $y(\pi) = \pi$; 6) $y' - y\mathrm{tg}x = -\dfrac{2}{3}y^4 \sin x$;

7) $x^3 y'' - x^2 y' = 1$; $y(1) = 1$; $y'(1) = 1$ 8) $yy'' - 4 = -(y')^2$;

9) $y'' - y' = 2x$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 2$; 10) $y'' + 9y = -36\sin 3x$;

11) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = y + 2z \end{cases}$; 12) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x - y \end{cases}$.

Вариант 10

1) $y' = \dfrac{y - 1}{x + 1}$; 2) $(e^x + 2)dy - y^2 e^x dx = 0$;

3) $xy' = \dfrac{y^2}{x^2} + 8\dfrac{y}{x} + 8$; $y(1) = 1$; 4) $y' - y\mathrm{tg}x = \sin 2x$;

5) $y' - \frac{2y}{1-x^2} = 1 + x; \quad y(0) = 0;$

6) $y' - y\,\mathrm{ctg}x = \frac{y^3}{\sin x};$

7) $(1 + x^2)y'' + 2xy' + 2 = 0;$
$y(0) = y'(0) = 1$

8) $yy'' = (y')^2 + 1;$

9) $y'' - y' = 6x^2 + 3x;$

10) $y'' + 4y' - 12y = 8\sin 2x; \quad y(0) = y'(0) = 1;$

11) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 5y \\ \frac{dy}{dt} = -7x - 3y \end{cases};$

12) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = -3x - y \end{cases}.$

Вариант 11

1) $(4 + e^{2x})yy' = e^{2x};$

2) $(1 + y^2)dx - xydy = 0;$

3) $(xy' - x)\mathrm{arctg}\frac{y}{x} = x; \quad y(1) = 0;$

4) $xy' - x = 2y; \; y(1) = 0;$

5) $y' - \frac{2}{x+1}y = e^x(x+1)^2;$

6) $3xy' + 5y = (4x - 5)y^4;$

7) $y'' = (y')^2 - y;$

8) $xy'' + y' - x^2 = 0; \quad y(1) = y'(1) = 1;$

9) $y'' - 7y' + 10y = e^{2x};$

10) $y'' + 2y' + 5y = 2\sin x; \quad y(0) = y'(0) = 1;$

11) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 8y \end{cases};$

12) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - y \end{cases}.$

Вариант 12

1) $(\sqrt{xy} - \sqrt{x})dy + ydx = 0;$

2) $\sqrt{4 - x^2}\,y' + xy^2 + x = 0;$

3) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}; \quad y(1) = 2;$

4) $y' + y\,\mathrm{ctg}x = 3\sin^4 x;$

5) $y' - \frac{1}{x}y = x^2 e^x; \quad y(1) = 2;$

6) $yy' - 4x - y^2\sqrt{x} = 0;$

7) $(y')^2 + 1 = yy'';$

8) $x^4 y'' + x^3 y' = 1;$

9) $y'' + 4y' + 4y = \sin 2x;$
$y(0) = y'(0) = 1;$

10) $y'' - 10y' = x^2;$

11) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y \end{cases}$; 12) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$.

Вариант 13

1) $yy' + x + 1 = 0$; 2) $y'x\ln x = y$;

3) $xy' = y(1 + \ln\frac{y}{x})$; $y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 4) $y' - y = e^{x}$;

5) $y' - \frac{1}{x}y = x\ln x$; $y(2) = 2$; 6) $y' + y = x\sqrt{y}$;

7) $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 3$; 8) $yy'' = y^2y' + (y')^2$;

9) $y'' + y = 2\cos 7x$; 10) $y'' - y' + y = x^3 + 6$; $y(0) = y'(0) = 1$;

11) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + z \\ \dfrac{dz}{dx} = -10y - z \end{cases}$; 12) $\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = y - 4x \end{cases}$.

Вариант 14

1) $\mathrm{tg}y\,dx + \mathrm{tg}x\,dy = 0$; 2) $(1 + e^{2x})yy' = e^{2x}$;

3) $y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$; $y(1) = 1$; 4) $y' + xy = -3x^3$;

5) $y' - \frac{y}{1 + x} = x^2$; $y(0) = 0$; 6) $xy' + y = xy^2$;

7) $xy'' - y' = x^2$; $y(1) = 2$; $y'(1) = 0$ 8) $2yy'' = 3(y')^2$;

9) $y'' - 7y' + 12y = e^{3x}$; 10) $y'' + y = \sin x$; $y(\frac{\pi}{2}) = y'(\frac{\pi}{2}) = 0$;

11) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$; 12) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - x \end{cases}$.

Вариант 15

1) $e^y(\frac{dy}{dx}+1)=1;$

2) $xdx-ydy=yx^2dy-xy^2dx;$

3) $xy'=y\ln\frac{y}{x}+y;\quad y(e)=1;$

4) $y'-y\cos x=-\sin 2x;$

5) $y'-\frac{2x}{1+x^2}y=1;\quad y(0)=2;$

6) $xy'+y)=\frac{1}{2}xy^2;$

7) $(1+x^2)y''+2xy'+2x=0;$ $y(0)=y'(0)=1$

8) $yy''-y'(1+y')=0;$

9) $y''-6y'+9y=3x-1;$

10) $y''-4y'+4y=\sin x;\quad y(0)=y'(0)=1;$

11) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-y\\ \frac{dy}{dt}=\frac{dx}{dt}-3x-y\end{cases};$

12) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x-3y\\ \frac{dy}{dt}=3x+y\end{cases}.$

Вариант 16

1) $(1-5x)dy=3ydx;$

2) $(1+e^x)yy'=e^x;\ y(0)=1;$

3) $4y'=\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}+5;$

4) $y'-\mathrm{ctg}y=\sin^3 x;$

5) $y'+\frac{1-2x}{x^2}y=1;\quad y(1)=0;$

6) $3(xy'+y)=y^2\ln x;$

7) $y''-\frac{y}{x}=xe^x;$ $y(0)=-1;\ y'(0)=0;$

8) $y''+2yy'^3=0;$

9) $y''+9y=e^{-3x};\ y(0)=y'(0)=0;$

10) $y''-y=\sin x;$

11) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=4x+6y\\ \frac{dy}{dt}=4x+2y\end{cases};$

12) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=8y-x\\ \frac{dy}{dt}=x+y\end{cases}.$

Вариант 17

1) $\frac{dx}{\sqrt{x}+1}+\frac{dy}{\sqrt{y}+1}=0;$

2) $y\ln y+xy'=0;$

3) $4xyy'=x^2+6xy+y^2;$ $y(1)=0;$

4) $y'-\frac{y}{x}=x\cos x;$

5) $y' + y\cos x = \cos x;\quad y(0) = 3;$

6) $xy' + y = y^2 \ln x;$

7) $y'' + \dfrac{y'}{x} - \dfrac{1}{x^3} = 0;$ $y(1) = y'(1) = 1$

8) $y'(1 + (y')^2) = 2y'';$

9) $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x;$ $y(0) = 0;\ y'(0) = 1$

10) $y'' - 13y' + 12y = 18x^2 - 39;$

11) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 2y \end{cases};$

12) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 4x \end{cases}.$

Вариант 18

1) $2x\sqrt{1 - y^2}\,dx + ydy = 0;$

2) $xy' - y^2 = y;$

3) $y' = \dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x};\quad y(1) = 1;$

4) $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{12}{x^4};$

5) $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{3}{x^3};\quad y(1) = 1;$

6) $y' + \dfrac{2y}{x} = 3x^2 y^{\frac{1}{3}};$

7) $y''\mathrm{tg}x = y' + 1;$ $y(\dfrac{\pi}{4}) = 0;\ y'(\dfrac{\pi}{4}) = -1;$

8) $yy'' + y = (y')^2;$

9) $y'' - 6y' + 8y = 2x + 1;$

10) $y'' + y = -\sin 2x;\quad y(\pi) = y'(\pi) = 1;$

11) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + x \\ \dfrac{dy}{dt} = 3y - 2x \end{cases};$

12) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x - 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 3y \end{cases}.$

Вариант 19

1) $(x^3 + 2)y' = 3y + 1;$

2) $\sqrt{4 + y^2} + \sqrt{2 - x^2}\,yy' = 0;$

3) $y' = \dfrac{y}{x} + \cos^{-1}\dfrac{y}{x};\quad y(1) = 0;$ 4) $y' + 4xy = -4x^3;$

5) $y' - \dfrac{y}{x + 1} = -x^2;\quad y(0) = 2;$

6) $(1 + x^2)y' - xy = x^2 y^2;$

7) $y''e^y = y';\ y(0) = 0;\ y'(0) = 1;$

8) $y''\mathrm{tg}x = y' + 1;$

9) $y'' - y' = 3x^2 - 2x + 1;$

10) $y'' + 2y' + 5y = -\cos x;$ $y(0) = 0;\ y'(0) = 1;$

11) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8y - x \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$;

12) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 4y \end{cases}$.

Вариант 20

1) $2xy' + y^2 = 1;$

2) $2x + 2xy^2 + \sqrt{1-x}\,y' = 0;$

3) $xy' - y = x\operatorname{tg}\dfrac{y}{x};\quad y(1) = 0;$

4) $y' + x^2 y = 3x^2;$

5) $y' - \dfrac{1}{x}y = \dfrac{x}{x-3};\quad y(4) = 2;$

6) $2xy' - 12y = -(5x^2 + 3)y^3;$

7) $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'};$ $y(2) = 0;\; y'(2) = 4;$

8) $y'' - 2y(y')^2 = 0;$

9) $y'' - 13y' + 12y = x - 1;$ $y(1) = 2;\; y'(1) = 3$

10) $y'' + 4y' = 4xe^{-4x};$

11) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3y + 2x \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y - 3x \end{cases}$;

12) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 8y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y \end{cases}$.

Вариант 21

1) $e^{x-y}y' = 1;$

2) $y' = \dfrac{y+1}{x^2};\; y(1) = 0;$

3) $xy' = y + \sin\dfrac{2y}{x};$

4) $y' - \dfrac{y}{x} = x\sin^3 x;\; y(\dfrac{\pi}{2}) = 1;$

5) $y'\cos x - y\sin x = \cos 5x;$

6) $2xy' - 3y) = -(20x^2 + 12)y^3;$

7) $y''\operatorname{tg}x - y' + \dfrac{1}{\sin x} = 0;$ $y(\dfrac{\pi}{2}) = 0;\; y'(\dfrac{\pi}{2}) = 1;$

8) $y'' = y'(1 + (y')^2);$

9) $y'' + 2y' + 5y = -\cos x;$

10) $y'' - 3y' + 2y = -4e^{-x};$ $y(0) = 1;\; y'(0) = 2;$

11) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 4y \end{cases}$;   12) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$.

Вариант 22

1) $(xy^2 + x)dx + (y - x^2 y)dy = 0$;   2) $3x + 3xy^2 + \sqrt{3 - x^2}\, y' = 0$;

3) $y' = 4 + (\frac{y}{x})^2 + \frac{y}{x}$; $y(1) = 1$;   4) $y' + 2xy = -4x^5$;

5) $y' - \frac{1}{x} y = x \frac{\sin x}{\cos^3 x}$; $y(\pi) = \frac{\pi}{2}$;   6) $y'(x - 1) - y = y^2$;

7) $y'' x \ln x - y' = 2$; $y(e) = y'(e) = 0$ 8) $yy'' = y^2 y' + (y')^2$;

9) $y'' + 4y' + 3y = e^{5x}$;
$y(0) = 0$; $y'(0) = 3$;   10) $y'' + 5y' + 4y = \sin x$;

11) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 5y + x = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$;   12) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$.

Вариант 23

1) $yy' = 1 + 2x$;   2) $\sqrt{9 - x^2}\, y' + x^2 (y + 1) = 0$;

3) $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$; $y(1) = 0$;   4) $y' - y\cos x = -\sin 2x$;

5) $y' - \frac{y}{x} = 3x^4$; $y(0) = 0$;   6) $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4$;

7) $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 0$;
$y(0) = 2$; $y'(0) = 3$ 8) $(y'')^2 = (y')^2 + 1$;

9) $y'' - 7y' + 12y = xe^x$;
$y(0) = y'(0) = 0$;   10) $y'' + y = \cos x$;

11) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y + 3x \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 4x \end{cases}$;   12) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y \end{cases}$.

Вариант 24

1) $(\sqrt{xy}-\sqrt{x})dy + ydx = 0;$

2) $(1+e^{x})yy' = e^{x};$

3) $y' = \dfrac{2x}{y} - \dfrac{y}{2x};\quad y(-1) = 0;$

4) $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{2}{x^{2}};$

5) $y' - \dfrac{1}{x}y = x\sin^{2}x;\quad y(\pi) = 1;$

6) $y' + 2xy = 2x^{3}y^{3};$

7) $x^{2}y'' + xy' = 1;$
$y(1) = 0;\ y'(1) = 1;$

8) $y'' = \dfrac{y'}{\sqrt{y}};$

9) $y'' + 4y' = 2\sin 2x;$

10) $y'' - y = e^{x};\quad y(0) = y'(0) = 1;$

11) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - y = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} - 3x - y = 0 \end{cases};$

12) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y \end{cases}.$

Вариант 25

1) $y(1+e^{x})dy = e^{x}dx;$

2) $(e^{2x}+6)dy - y^{3}e^{2x}dx = 0;$

3) $y' - \dfrac{3y}{x} - \dfrac{x}{3y} = 0;\quad y(1) = 1;$

4) $y'\sin x + y\cos x = \sin^{2}2x;$

5) $y' - \dfrac{1}{x}y = \dfrac{x}{(x-2)^{2}};\quad y(1) = 0;$

6) $y' + 2\dfrac{y}{x} = 2\sqrt{x}\cos x;$

7) $xy'' - 1 = y';\ y(1) = y'(1) = 1;$

8) $1 + (y')^{2} = -yy'';$

9) $y'' + y' - 2y = 4\sin 2x;$

10) $y'' + 11y' = 11xe^{-11x};$
$y(0) = 0;\ y'(0) = 11;$

11) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + x \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x - 5y \end{cases};$

12) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 4y \end{cases}.$

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ 8
«Ряды»

После изучения данной темы и выполнения индивидуального задания студент должен уметь:

- исследовать числовые ряды с положительными членами на сходимость с помощью признаков сравнения д'Аламбера;
- исследовать на условную и абсолютную сходимость знакочередующиеся ряды (в том числе с использованием признака Лейбница);
- находить область сходимости степенного ряда;
- использовать стандартные разложения в ряд Маклорена функций e^x, cos x, sin x, $(1+x)^L$, ln(1+x), для разложения функций в степенной ряд;
- применять степенные ряды для приближенных вычислений значений функций и определенных интегралов, для приближенного решения дифференциальных уравнений.

Каждый вариант содержит 7 задач из различных разделов темы.

Условия к заданиям каждого варианта

Задача 1-2. Исследовать числовой ряд на сходимость.

Задача 3. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость.

Задача 4. Найти область сходимость числового ряда.

Задача 5. Разложить функцию в ряд Маклорена, используя стандартные разложения. Указать область сходимости полученного ряда.

Задача 6. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0.001.

Задача 7. Найти первые 4 ненулевых числа разложенные в степенной ряд решения данного дифференциального уравнения.

Приведем решение типового варианта:

Задача 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^2\sqrt{n}+2}$.

Решение. Общий член ряда $a_n=\frac{2n-1}{n^2\sqrt{n}+2}$. При $n\to\infty$ $a_n=\frac{2-\frac{1}{n}}{n\sqrt{n}+\frac{2}{n}}\cong\frac{2}{n\sqrt{n}}$. Сравним данный ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\sqrt{n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{3/2}}$, который сходится (обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ с показателем $\alpha=\frac{3}{2}\geq 1$).

Поскольку $\forall n \ \dfrac{2n-1}{n^2\sqrt{n+2}} < \dfrac{2n}{n^2\sqrt{n}} = \dfrac{2}{n\sqrt{n}}$, то на основании признака сравнения делаем вывод, что и исходный ряд также сходится.

Задача 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n}{(n+1)!}$.

Решение. Если общий член ряда содержит показательную функцию и (или) факториал, то, как правило, исследовать его сходимость можно с помощью признака д‘Аламбера.

$$a_n = \frac{5^n}{(n+1)!}; = a_n = \frac{5^{n+1}}{(n+2)!}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{5^n} = 5 \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+2)!} =$$

$$= 5 \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\ldots n(n+1)}{1\cdot 2\ldots n(n+1)(n+2)} = 5 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0 < 1$$

Следовательно, ряд сходится.

Задача 3. Исследуем на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+2}}$.

Решение. Вначале проверим необходимый признак сходимости ряда.

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+2}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+2}} = 0.$$

Необходимые условия сходимости ряда выполнены, т.е. ряд может сходится. Составим теперь ряд из модулей членов исходного ряда и исследуем его сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+2}} \right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$. Этот ряд расходится, так как он совпадает с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, у которого отброшены два первых члена. Следовательно, исследуемый ряд не может сходится абсолютно.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+2}}$ удовлетворяет всем условиям теоремы Лейбница:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

2) этот ряд знакочередующийся;

3) $\frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{4}} > \frac{1}{\sqrt{5}} > \ldots > \frac{1}{\sqrt{n+2}} > \frac{1}{\sqrt{n+3}} > \ldots$,

то есть $|a_1| > |a_2| > \ldots > |a_n| > |a_{n+1}| > \ldots$, следовательно, этот ряд сходится условно.

Задача 4. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n}$.

Решение. Для решения примера применяем признак д'Аламбера. Этот призрак применяем только к рядам с положительными членами, поэтому будем брать отношения модулей n+1 и n-го членов ряда:

$$u_n(x) = \frac{x^n}{5^n};\ u_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}}\cdot\frac{5^n}{x^n}\right| = \frac{|x|}{5}$$

Так как в случае сходимости должно быть $\frac{|x|}{5} < 1$, то $|x| < 5$ или -5<x<5. При $x = \pm 5$ $\frac{|x|}{5} = 1$ и признак д'Аламбера не дает ответ на вопрос о сходимости ряда. Рассмотрим эти случаи отдельно

а) x=5: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$. Этот ряд расходится, т.к. $a_n \not\to 0$ при $n \to \infty$.

б) x=-5: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{5^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$. Этот ряд расходится по той же причине, что и ряд в п. А).

Итак, область сходимости: -5<x<5

Задача 5. Разложим в ряд Маклорена функцию $f(x) = \frac{1}{x}\sin(x^2)$.

Решение. Используя стандартное разложение

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!},\ \forall t \in R$$

получаем

$$\sin(x^2) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!};\ \forall x \in R \text{ и}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}\sin(x^2) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{4n-3}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^9}{5!} - \ldots$$

Полученный степенной ряд сходится к функции f(x) при всех x≠0.

Задача 6. Вычислим определенный интеграл $\int\limits_0^{0,5}\sin(x^2)dx$ с точностью до 0,001.

Решение. Для решения задачи запишем разложение подынтегральной функции в степенной ряд (см. пред. пример).

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \ldots$$

Он сходится на всей числовой прямой, поэтому его можно всюду почленно интегрировать. Следовательно

$$\int\limits_0^{0,5}\sin(x^2)dx = \int\limits_0^{0,5}\left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \ldots\right)dx =$$

$$= \left.\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11\cdot 5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)(2n-1)!} + \ldots\right)\right|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{24} - \frac{1}{2^7\cdot 7\cdot 3!} + \frac{1}{2^{11}\cdot 11\cdot 5!} - \ldots \approx \frac{1}{24} \approx 0,042,$$

поскольку уже второй член полученного знакочередующегося ряда меньше 0,001.

Задача 7. Найдем первые четыре ненулевых члена разложения в степенной ряд дифференциального уравнения $y'' = x^2 + y^2$, если y(0)=1, y'(0)=1.

Решение. Искомое разложение имеет вид

$$y(x) = y(0) + y'(0)\frac{x}{1!} + y''(0)\frac{x^2}{2!} + y'''(0)\frac{x^3}{3!} + \ldots \qquad (*)$$

y(0) и y'(0) известны из начальных условий y''(0) найдем из заданного дифференциального уравнения:

$$y''(0) = 0^2 + y(0)^2 = 1.$$

Дифференцируя обе части уравнения, находим дальше

$$y''' = 2x + 2y \cdot y' \Rightarrow y'''(0) = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$$

Подставляя найденные значения в ряд (*) получаем

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3!} + \ldots = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3!} + \ldots$$

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ «Ряды»

Вариант 1

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+5n}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$;

5) $f(x) = x\sqrt{1+x}$;

6) $\int\limits_0^1 \sin\frac{x^2}{2}\,dx$;

7) $y'' = xy^2 - y'$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

Вариант 2

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{10n^3+1}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^4+2n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5n+1}$;

5) $f(x) = x\sin x^2$;

6) $\int\limits_0^1 e^{-\frac{x^3}{4}}\,dx$;

7) $y' = x^2 + y^3$; $y(1) = 1$.

Вариант 3

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3\ln n}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{n+1}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+2)}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n+2}$;

5) $f(x) = \ln(4+x^3)$;

6) $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}$;

7) $y' + xy^2 = 2\cos x$; $y(0) = 1$.

Вариант 4

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{n+1}}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{50n+1}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cdot n^2}{n+3}$;

5) $f(x)=\sqrt{3-x^2}$

6) $\int\limits_0^1 \cos x^4 dx$;

7) $y'' + x^3 y = \sin x;\ y(0)=1; y'(0)=1$

Вариант 5

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6n}{9n^2+6n+1}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\sqrt{n}}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{3^n(n+2)}$;

5) $f(x)=\frac{\sin x - x}{x^3}$;

6) $\int\limits_0^{0.5} \sqrt{1+x^3}dx$;

7) $y' = y + xe^y, y(0) = 0$;

Вариант 6

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{n^3+3n-2}$;

2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n\ln^2 n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)5^{2n}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cdot 10^n}{(n+1)!}$

5) $f(x)=\cos 3x^2$;

6) $\int\limits_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^5}}$;

7) $y'' = (y')^2 + xy,\ y(0)=4;\ y'(0) = -2.$

Вариант 7

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2n}{n^2+n-2}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^{n+1}}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)5^n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n8^n}$;

5) $f(x)=\ln(1-\frac{x}{5})$;

6) $\int\limits_0^{0.25} \frac{\sin 2x-2x}{x^3}dx$;

7) $y''=yy'-x^2, y(0)=y'(0)=1.$

Вариант 8

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-2}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{tg}\left(\frac{2\pi}{n^2}\right)$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{10n-1}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n+3}$;

5) $f(x)=\sqrt{1+x^2}$

6) $\int\limits_0^{0.1} e^{-0.6x^2}dx$;

7) $y''+xy=0, y(0)=1, y'(0)=0$

Вариант 9

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2n+1}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)!}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n^2}{n^4+5n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2+1}$;

5) $f(x)=\ln(1+2x)$;

6) $\int\limits_0^{0.1} x^{-1}\left(1-e^{-2x}\right)dx$;

7) $\left(1+x^2\right)y''+xy'-y=0,\ y(0)=y'(0)=1.$

Вариант 10

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \ln n}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(2n+1)!}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{3n^2 + 1}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 1}$;

5) $f(x) = 1 - e^{3x}$;

6) $\int\limits_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$;

7) $y' = 2x + \cos y,\ y(0) = 0.$

Вариант 11

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{100n}{n^3 + 1}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n^2 + 1}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 5n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n+1)!}$;

5) $\oint(x) = x \sin x^2$;

6) $\int\limits_0^{0.1} e^{3x^2}\,dx$;

7) $y'' = x^2 y, y(0) = y'(0) = 1.$

Вариант 12

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)2^n}$;

5) $f(x) = \frac{1}{x}(1 - \cos 3x)$;

6) $\int\limits_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^4}}$;

7) $y'' - xy = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0.$

Вариант 13

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1}$;   2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{2\pi}{3n}\right)$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3(n+1)}$;   4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$;

5) $f(x) = x^{-1} \sin 3x$;   6) $\int\limits_0^{0.25} \sqrt{1+x^3}\,dx$;

7) $(1+x^2)y'' - 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0.$

Вариант 14

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^2 - 5n + 6}$;   2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+`1)}$;   4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n7^n}$;

5) $f(x) = \frac{1}{5-x^2}$;   6) $\int\limits_0^{0.5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$;

7) $y' + y^2 = e^x, y(0) = 0.$

Вариант 15

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2\sqrt{n+1}}$;   2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n+1)!}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+5n}$;   4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}e^n}{n^2}$

5) $f(x) = x^2 \cos x^2$;   6) $\int\limits_0^{0.5} \frac{2x - \sin 2x}{x^2}\,dx$

7) $y' = y^3 - x, y(0) = 1.$

Вариант 16

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^3+3n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(n+1)!5^n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n^2}$;

5) $f(x)=e^{-x^2}$; 6) $\int\limits_0^{0.2}\cos 3x^2 dx$;

7) $y''=(2x-1)y-1,\ y(0)=0,\ y'(0)=1.$

Вариант 17

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\sqrt{n}}{n^3+n^2-1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+1}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{3^n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n^2+1}$;

5) $f(x)=\sin 2x+\cos 2x$; 6) $\int\limits_0^{0.1}\sqrt[3]{1+x^2}dx$;

7) $y''-y\cos x=x, y(0)=1, y'(0)=0$.

Вариант 18

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[10]{n+1}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{7^n}$;

3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\ln^4 n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{5n}$;

5) $\oint(x)=\sin x-\cos x$; 6) $\int\limits_0^{0.5}\frac{\ln(1+\frac{x}{5})}{x}dx$;

7) $y''+xy'+y=x^2, y(0)=y'(0)=0$.

Вариант 19

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3+4n-1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^3}{2^n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 5^n}$;

5) $f(x) = \frac{x - \sin x}{2x}$;

6) $\int\limits_0^{0,2} \sin\left(5x^2\right) dx$;

7) $y'' = x + y',\ y(0) = y'(0) = 1$;

Вариант 20

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+11}{n^2+4}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{5^n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n} \cdot 4^n}{n}$;

5) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x^2\right)$;

6) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^9}$;

7) $y'' + y\cos x = 0,\ y(0) = 3, y'(0) = 0$;

Вариант 21

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{n\sqrt[3]{n^2}}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{7^n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2+1}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 \cdot 2^n}$;

5) $f(x) = \sin\left(\pi - \frac{x^2}{4}\right)$;

6) $\int\limits_0^{0,5} \cos 4x^2 dx$;

7) $y' = y^2 - x,\ y(0) = 1$.

Вариант 22

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4+2n}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n^5+1}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n(n+1)}$;

5) $f(x) = e^{3x^2} - 1$; 6) $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$;

7) $y'' = x \sin y',\ y(1) = 0, y'(1) = \frac{\pi}{2}$;

Вариант 23

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n-2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^{n-1}}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{n^3+5}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+1)3^n}$;

5) $f(x) = \sqrt{1+x^7}$; 6) $\int\limits_0^{0,2} x^3 \sin 5x \cdot dx$;

7) $y'' = xy' - y^2,\ y(0) = 1, y'(0) = 2$;

Вариант 24

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^4+2n-1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 \cdot 5^n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[5]{n^7}}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n\left(n^3+2\right)}$;

5) $f(x) = x \sin x - x^2$; 6) $\int\limits_0^{1} x^4 \cos x^2 \ dx$;

7) $y'' - xy = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = 1$;

Вариант 25

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2\sqrt[5]{n}}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 e^n}$;

5) $f(x) = \frac{1}{x}\sin x^2$;

6) $\int\limits_0^{0,5} \frac{1-\cos 3x}{2x^2} dx$;

7) $y'' - xy = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$